

Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 6 - 9 a 15 de Outubro de 2025

1. Determine a solução geral das equações diferenciais ordinárias

(a) $\frac{dx}{dt} + \frac{1}{1+t^2}x = 0.$

(b) $\frac{dy}{dx} + y\sqrt{x} \sin x = 0.$

Resolução:

(a) Poderíamos simplesmente aplicar diretamente a fórmula da solução. Mas vamos resolver o problema usando os passos que levam a essa fórmula.

Começamos por observar que $x(t) = 0$ é solução (a equação é linear e homogénea). Supondo então que existe uma solução não nula, existe então necessariamente, por continuidade, um subintervalo aberto do seu domínio onde $x(t) \neq 0$ em todo esse subintervalo. Podemos então, assumindo que $x(t)$ satisfaz a EDO dada, dividir toda a equação por $x(t)$, para t nesse intervalo onde a solução não se anula,

$$\frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Do lado esquerdo da equação podemos reconhecer agora a derivada em ordem a t de $\log |x(t)|$, pelo que

$$\frac{d}{dt} (\log |x(t)|) = -\frac{1}{1+t^2},$$

donde, por primitivação, se obtém

$$\log |x(t)| = \arctan(t) + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária de primitivação. Exponenciando a equação dos dois lados obtém-se agora

$$|x(t)| = e^c e^{\arctan(t)} = K e^{\arctan(t)},$$

em que $K = e^c$ é agora uma constante arbitrária positiva (resultante de e^c , com $c \in \mathbb{R}$ arbitrária). Finalmente, tendo em conta que $x(t)$ é contínua, e não nula no intervalo em questão, então não poderá mudar de sinal, pelo que só poderá ser

$$x(t) = \pm K e^{\arctan(t)}.$$

Conclui-se também, por continuidade, que se a solução $x(t)$ é não nula nalgum ponto, será necessariamente não nula numa vizinhança desse ponto, e portanto dada por esta fórmula nessa vizinhança. Mas então, será dada também por esta fórmula em todo o $t \in \mathbb{R}$, porque não é possível tal solução se anular ou alternar de sinal, sem perder a continuidade.

Tem-se assim, por fim, que as possíveis soluções da equação linear homogénea são $x(t) = 0$, $x(t) = Ke^{\arctan(t)}$ ou $x(t) = -Ke^{\arctan(t)}$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, com K uma constante positiva. Mas estas três possibilidades resumem-se numa só fórmula

$$x(t) = Ce^{\arctan(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Desta vez usaremos diretamente a fórmula da solução

$$y(x) = Ce^{\int \sqrt{x} \sin x \, dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A solução está assim determinada e não pode ser mais simplificada, dado que não é possível escrever a primitiva da função $\sqrt{x} \sin x$ de forma explícita usando funções elementares (atenção que, sendo uma função contínua em $]0, +\infty[$, a sua primitiva existe neste intervalo, só não é possível escrevê-la de forma explícita usando funções elementares como polinómios, trigonométrica, exponenciais, ou compostas e combinações delas e das suas inversas).

2. Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$(1 + t^2) \frac{dx}{dt} + 4tx = t, \quad x(1) = -2.$$

Resolução: Começamos por dividir toda a equação pelo coeficiente não nulo $(1 + t^2)$,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4t}{(1 + t^2)} x(t) = \frac{t}{(1 + t^2)}.$$

Observa-se assim que se trata duma equação diferencial ordinária não homogénea. O fator integrante que transforma o lado esquerdo da equação na derivada dum produto é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4t}{(1+t^2)} dt} = e^{2 \log(1+t^2)} = (1 + t^2)^2.$$

Portanto, multiplicando toda a equação por $\mu(t)$ obtemos:

$$(1 + t^2)^2 \frac{dx}{dt} + 4t(1 + t^2)x(t) = t(1 + t^2) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[(1 + t^2)^2 x(t)] = t(1 + t^2).$$

Neste ponto, como temos um problema de valor inicial, iremos integrar a partir de $t_0 = 1$ para incorporar imediatamente o valor da condição inicial $x(t_0)$, em vez de fazer primitivação genérica, que seria o caso se nos tivessem pedido todas as possíveis soluções.

Assim, integrando os dois lados da equação

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0=1}^t \frac{d}{ds} [(1+s^2)^2 x(s)] ds &= \int_{t_0=1}^t s(1+s^2) ds \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (1+t^2)^2 x(t) - (1+1^2)^2 x(1) &= \left. \frac{(1+s^2)^2}{4} \right|_{t_0=1}^t \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (1+t^2)^2 x(t) &= -2^3 + \frac{(1+t^2)^2}{4} - \frac{(1+1^2)^2}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (1+t^2)^2 x(t) &= \frac{(1+t^2)^2}{4} - 9 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x(t) &= \frac{(1+t^2)^2 - 36}{4(1+t^2)^2} = \frac{t^4 + 2t^2 - 35}{4(1+t^2)^2},
 \end{aligned}$$

que é a solução, única, do problema.

3. Qual a solução geral da equação

$$y^2 y' = 2e^{-t^3} y^2 - 3t^2 y^3.$$

Resolução: Trata-se, aparentemente, de uma equação diferencial ordinária não linear, devido à presença dos termos y^2 e y^3 . Mas rapidamente se percebe que, dividindo por $y(t)^2$, ela se reduz a uma equação linear não homogênea. Assim, começamos por distinguir o caso $y(t) = 0$, que é solução identicamente nula desta equação não linear, das restantes $y(t) \neq 0$. Nesta última situação podemos dividir toda a equação por $y(t)$ obtendo

$$y'(t) + 3t^2 y(t) = 2e^{-t^3}.$$

A partir daqui seguimos o procedimento habitual para a resolução geral de EDOs lineares não homogêneas, começando pela determinação de um fator integrante que transforme o lado esquerdo da equação na derivada dum produto

$$\mu(t) = e^{\int 3t^2 dt} = e^{t^3}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$ obtém-se

$$e^{t^3} y'(t) + 3t^2 e^{t^3} y(t) = 2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} [e^{t^3} y(t)] = 2$$

e primitivando arbitrariamente, para a obtenção de todas as possíveis soluções, chega-se a

$$e^{t^3} y(t) = 2t + c \Leftrightarrow y(t) = (2t + c)e^{-t^3}.$$

A solução geral da EDO dada é assim, ou $y(t) = 0$, ou no caso de solução não identicamente nula, $y(t) = (2t + c)e^{-t^3}$ com $c \in \mathbb{R}$.