Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 5 - 2 a 8 de Outubro de 2025

1. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = \operatorname{sen} y.$$

(a) Esboce o campo de direções e trace os respetivos tipos de soluções.

(b) Determine todos os pontos de equilíbrio da equação e classifique-os quanto a serem estáveis ou instáveis.

Resolução:

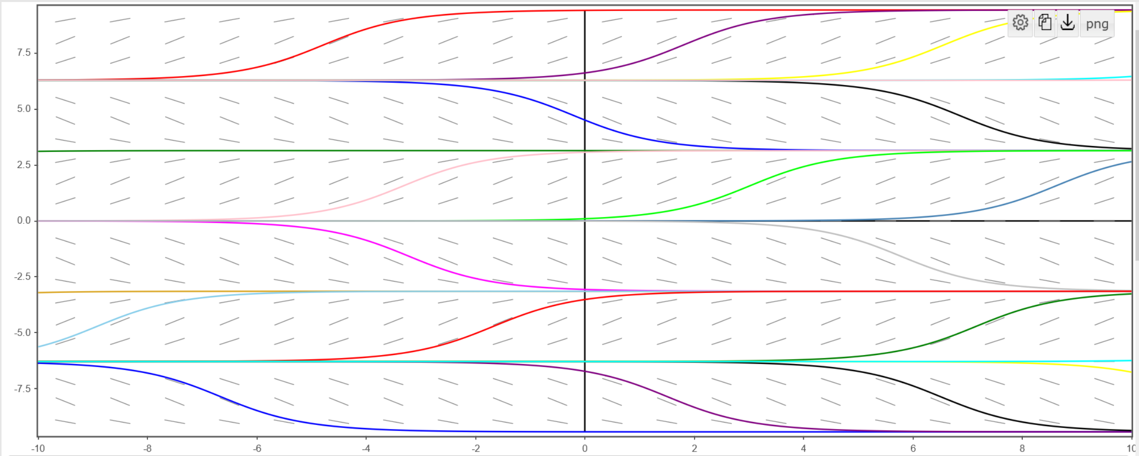
(a)A equação é autónoma, visto que a derivada da solução depende apenas do valor (da posição) y e não do instante de tempo t. Assim, as inclinações do campo de direções, no plano ty, dependem só do valor de y, sendo paralelas para todo o t. As soluções serão também paralelas, dependendo apenas do valor $y(t_0)$ da sua condição inicial.

Como é habitual, para equações autónomas, começamos então por determinar os pontos de equilíbrio da equação, ou seja, os valores de y para os quais a derivada da solução é nula. Nesta caso são

$$y' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Entre os pontos de equilíbrio a derivada pode apenas ter um dos sinais, ou positivo ou negativo porque, pelo teorema do valor intermédio para funções contínuas, se tivesse os dois sinais e transitasse de sinal entre dois pontos y teria de haver um outro zero entre eles, o que é impossível. Assim, é fácil ver que entre $2k\pi < y < (2k+1)\pi$, se tem apenas $\operatorname{sen} y > 0$, ou seja, a solução $y(t)$ será crescente, e entre $(2k+1)\pi < y < (2k+2)\pi$, tem-se $\operatorname{sen} y < 0$ e portanto aí $y(t)$ é decrescente.

Isto é suficiente para esboçar o campo de direções e alguns tipos de soluções.



(b) Já se viu, na alínea anterior, que os pontos de equilíbrio desta equação autónoma são as soluções constantes $y(t) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Resta analisar a sua estabilidade. Mas esta é evidente, até observando o campo de direções e o esboço das soluções:

- as soluções constantes $y(t) = k\pi$, com k par, são pontos de equilíbrio instável visto que pequenas perturbações das condições iniciais fazem as soluções afastarem-se do ponto de equilíbrio e convergir para $y(t) = k\pi$, com k ímpar.
- as soluções constantes $y(t) = k\pi$, com k ímpar, são pontos de equilíbrio estável porque, contrariamente às anteriores, pequenas perturbações das condições iniciais fazem as soluções convergir de volta a aproximarem-se delas.

2. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = \frac{2t}{y - t}$$

(a) Determine todas as soluções da forma $y(t) = mt$, com $m \in \mathbb{R}$.

(b) Esboce o campo de direções e trace os respetivos tipos de soluções. (Sugestão: Comece por procurar pontos do domínio da equação em que as derivadas das soluções têm valores determinados.)

Resolução:
(a) Substituindo $y(t) = mt$ na equação, procuramos os valores de m que a verificam, ou seja

$$m = \frac{2t}{mt - t} \Leftrightarrow m = \frac{2}{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - m - 2 = 0 \quad (m \neq 1)$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad m = 2 \quad \text{ou} \quad m = -1.$$

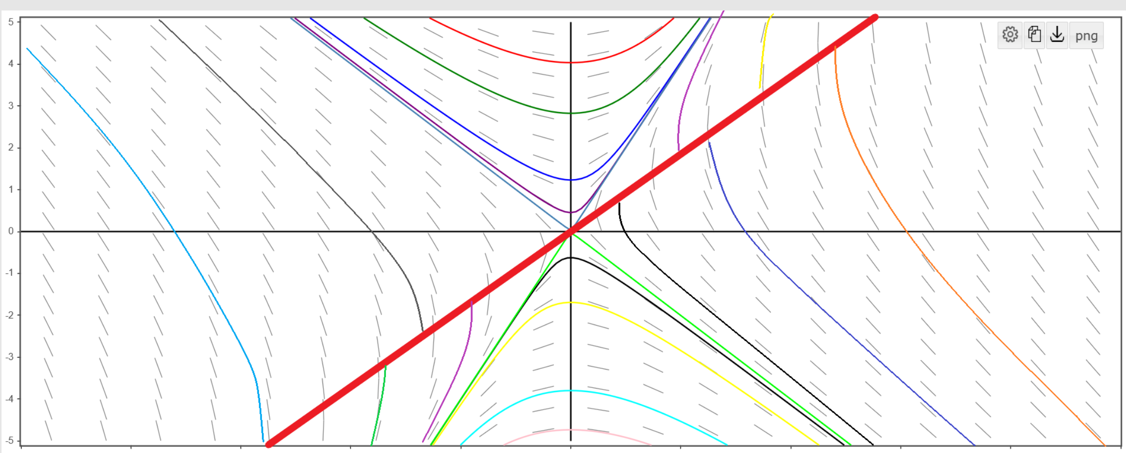
Ou seja, as funções $y(t) = 2t$ e $y(t) = -t$ são as duas únicas soluções da forma $y(t) = mt$ da equação (Em rigor, como a equação não está definida no ponto $(0, 0)$ do plano, estas soluções não podem ser considerada com domínio $t \in \mathbb{R}$, pelo que, relembrado que a definição de solução obriga a que os seus domínios sejam obrigatoriamente intervalos, deverão então ser considerados como domínios possíveis os intervalos $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ o que, em face das combinações de duas soluções para cada um dos dois intervalos, resulta em 4 soluções).

(b) Seguindo a sugestão, procuramos regiões do plano ty em que as derivadas das soluções tenham valores determinados. Seja o valor dessa derivada, digamos, λ. Então, os pontos do plano em que as soluções que por eles passam o fazem com derivada igual a λ são dados por

$$\lambda = \frac{2t}{y-t} \Leftrightarrow \lambda y - \lambda t = 2t \Leftrightarrow y = \frac{2+\lambda}{\lambda} t.$$

Ou seja, são retas que passam pela origem do plano, com declive $\frac{2+\lambda}{\lambda}$. Por exemplo, os pontos do plano ty onde as soluções passam com derivada nula são os pontos com $\lambda = 0$, ou seja $t = 0$ e isso corresponde ao eixo dos yy (reta com declive infinito). Sobre o eixo dos tt, ou seja, na reta $y = 0$ as soluções passam com derivada $\lambda = -2$. Os pontos onde as soluções passam com declive de 45, isto é com derivada $\lambda = 1$ são os pontos da reta $y = 3t$. Os pontos onde o declive das soluções é $\lambda = -1$ são precisamente $y = -t$, ou seja a reta cujo declive é o mesmo das soluções que passam nesses pontos. Ora essa situação especial corresponde à própria reta $y = -t$ ser ela mesmo solução. Idem, para os pontos onde o declive é $\lambda = 2$, que é a reta $y = 2t$. São as duas soluções obtidas na alínea anterior. Por fim, pontos especiais, que não estão sequer no domínio da equação são os da reta $y = t$, onde a equação não está definida visto o denominador da fração se anular: podemos considerar que são pontos em que as soluções atingem derivada infinita e deixam de estar definidas.

Esboçando os campos de direções, com os declives λ, sobre as retas $y = \frac{2+\lambda}{\lambda} t$ obtém-se então o esboço (a reta espessa a vermelho indica os pontos $y = t$ onde a equação não está definida e que, por isso, está fora do domínio da equação e das soluções):



3. Determine a solução geral das equações diferenciais ordinárias

   (a) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{1+t^2}x = 0.$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} + y\sqrt{x}\,\operatorname{sen} x = 0.$

Resolução:
(a) Poderíamos simplesmente aplicar diretamente a fórmula da solução. Mas vamos resolver o problema usando os passos que levam a essa fórmula.

Começamos por observar que $x(t) = 0$ é solução (a equação é linear e homogénea). Supondo então que existe uma solução não nula, existe então necessariamente, por continuidade, um subintervalo aberto do seu domínio onde $x(t) \neq 0$ em todo esse subintervalo. Podemos então, assumindo que $x(t)$ satisfaz a EDO dada, dividir toda a equação por $x(t)$, para t nesse intervalo onde a solução não se anula,

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Do lado esquerdo da equação podemos reconhecer agora a derivada em ordem a t de $\log|x(t)|$, pelo que

$$\frac{d}{dt}\left(\log|x(t)|\right) = -\frac{1}{1+t^2},$$

donde, por primitivação, se obtém

$$\log|x(t)| = \arctan(t) + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária de primitivação. Exponenciando a equação dos dois lados obtém-se agora

$$|x(t)| = e^c e^{\arctan(t)} = Ke^{\arctan(t)},$$

em que $K = e^c$ é agora uma constante arbitrária positiva (resultante de e^c, com $c \in \mathbb{R}$ arbitrária). Finalmente, tendo em conta que $x(t)$ é contínua, e não nula no intervalo em questão, então não poderá mudar de sinal, pelo que só poderá ser

$$x(t) = \pm Ke^{\arctan(t)}.$$

Conclui-se também, por continuidade, que se a solução $x(t)$ é não nula nalgum ponto, será necessariamente não nula numa vizinhança desse ponto, e portanto dada por esta fórmula nessa vizinhança. Mas então, será dada também por esta fórmula em todo o $t \in \mathbb{R}$, porque não é possível tal solução se anular ou alternar de sinal, sem perder a continuidade.

Tem-se assim, por fim, que as possíveis soluções da equação linear homogénea são $x(t) = 0$, $x(t) = Ke^{\arctan(t)}$ ou $x(t) = -Ke^{\arctan(t)}$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, com K uma constante positiva. Mas estas três possibilidade resumem-se numa só fórmula

$$x(t) = Ce^{\arctan(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Desta vez usaremos diretamente a fórmula da solução

$$y(x) = Ce^{\int \sqrt{x} \operatorname{sen} x \, dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A solução está assim determinada e não pode ser mais simplificada, dado que não é possível escrever a primitiva da função $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$ de forma explícita usando funções elementares (atenção que, sendo uma função contínua em $]0, +\infty[$, a sua primitiva existe neste intervalo, só não é possível escrevê-la de forma explícita usando funções elementares como polinómios, trigonométrica, exponenciais, ou compostas e combinações delas e das suas inversas).