Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 4 - 25 de Setembro a 1 de Outubro de 2025

1. Verifique a validade do teorema de Stokes quando aplicado ao campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2, x, z^2)$$

e à superfície, S, constituída pela parte do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 0$, considerando a normal unitária em cada ponto de S, ν, com terceira componente positiva.

Resolução: Temos que verificar que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\gamma \ = \ \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS$$

sendo C o bordo de S com orientação compatível com a escolha de ν.

Comecemos por calcular o integral de superfície. S pode ser parametrizada por $g(x,y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ no domínio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$. Assim

$$\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} = (2x, 2y, 1)$$

Dado que a terceira componente deste vetor é positiva (está de acordo com a indicação dada no enunciado) vamos usar este vetor como a normal, no cálculo do fluxo de $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ através de S. Por outro lado

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (0, 0, 1 - 2y)$$

Assim

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \ &= \ \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F}\big(g(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx \, dy \\ &= \ \iint_D (0, 0, 1 - 2y) \cdot (2x, 2y, 1) \, dA \ = \ \iint_D (1 - 2y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu dS \ &= \ \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2\rho \operatorname{sen} \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \ \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho - 2\rho^2 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \, d\rho \ = \ \int_0^1 2\pi \rho \, d\rho \ = \ \pi \end{aligned}$$

Vamos agora calcular o integral de linha — isto é, o trabalho de $\mathbf{F}$ ao longo do bordo de S. O bordo de S, ∂S, é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano $z = 0$, orientada positivamente quando vista de cima (para ser compatível com o sentido de ν). A curva ∂S pode então parametrizada por $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, pelo que:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t, \cos t, 0) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}^3 t + \cos^2 t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \;=\; \pi.
\end{aligned}$$

Confirma-se, portanto, a validade do teorema de Stokes neste exemplo particular.

2. Calcule a circulação do campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x^2, -z)$ ao longo da curva dada por $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 3$, percorrida no sentido anti-horário (quando vista de cima), utilizando:

(a) a definição de integral de linha de um campo vetorial ao longo de um caminho;

(b) o teorema de Stokes.

Resolução:
(a) A curva é uma circunferência de raio 2, contida no plano $z = 3$; assim, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 3) \quad , \quad t \in [0, 2\pi].$$

Logo, a circulação do campo $\mathbf{F}$ é dada por

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} \left(2\operatorname{sen} t, 4\cos^2 t, -3\right) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-4\cos^2 t + 8\operatorname{sen}^3 t\right)\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2(\cos 2t - 1)\, dt \;+\; \int_0^{2\pi} 8(1 - \cos^2 t)\operatorname{sen} t\, dt \\
&= (\operatorname{sen} 2t - 2t)\Big|_0^{2\pi} + 8\left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= -4\pi.
\end{aligned}$$

(b) A curva C é regular, fechada e simples, e coincide com o bordo do círculo

$$S \;=\; \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq 4\,, z = 3\right\}$$

Neste caso, para escolher uma orientação para S compatível com C devemos escolher a normal unitária $\nu = (0, 0, 1)$. Dado que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \; = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = \; (0, 0, 2x - 1)$$

temos, pelo teorema de Stokes, que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\gamma \; = \; \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \iint_S (2x - 1) \, dS.$$

Efetuando a mudança para coordenadas polares, obtém-se

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\gamma \; &= \; \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2\rho \cos\theta - 1)\rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \; \int_0^2 \Big(2\rho^2 \underbrace{\textstyle\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} \; -\rho \Big) \, d\rho \\ &= \; -\frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^2 \; = \; -4\pi, \end{aligned}$$

que é o resultado esperado.

3. Seja S a superfície parametrizada por

$$g(u, v) \; = \; \big(u, \, v, \, 2 - u^2 - v^2\big), \quad \text{com} \;\; (u, v) \; \in \; B \; = \; \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \, : \, u^2 + v^2 < 1\big\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, x + y)$$

através de S na direção da normal com terceira componente positiva, utilizando

(a) a definição de fluxo;

(b) o teorema de Stokes.

Resolução:

(a) O fluxo do rotacional do campo vetorial $\mathbf{F}$ é o integral $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS$. Temos que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \; = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 0 & x + y \end{vmatrix} \; = \; (1, -1, -1).$$

Por outro lado, uma normal à superfície é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} \;=\; (2u, 2v, 1)$$

Assim sendo,

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_S (1, -1, -1) \cdot (2u, 2v, 1) \, dS \;=\; \iint_B (2u - 2v - 1) \, du \, dv.$$

Efetuando a mudança para coordenadas polares $u = \rho \cos\theta$, $u = \rho \operatorname{sen}\theta$, e como B é dado por $(\rho, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\nu} \, dS \;&=\; \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2\rho\cos\theta - 2\rho\operatorname{sen}\theta - 1) \, \rho \, d\theta \, d\rho \\ &=\; \int_0^1 \left(2\rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} + 2\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \rho \int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho \\ &=\; \int_0^1 (-2\pi\rho) \, d\rho \;=\; -\pi\rho^2 \Big|_0^1 \;=\; -\pi. \end{aligned}$$

(b) Para aplicar o teorema de Stokes necessitamos de uma parametrização do bordo de S cujo sentido é compatível com a orientação da superfície. Sendo ∂B a circunferência $u^2 + v^2 = 1$, tomando $u(t) = \cos t$ e $v(t) = \operatorname{sen} t$, ou seja,

$$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t\big) \qquad t \in [0, 2\pi],$$

e tendo em conta que $\overrightarrow{n}$ — a orientação de S segundo a qual se pretende calcular o fluxo — coincide com a normal induzida pela parametrização, então o bordo de S é o caminho

$$\begin{aligned} \Gamma(t) \;&=\; g \circ \gamma(t) \;=\; g\big(\cos t, \operatorname{sen} t\big) \\ &=\; \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\big) \;=\; \big(\cos t, \operatorname{sen} t, 1\big), \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \;&=\; \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\Gamma \\ &=\; \int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen} t, 0, \cos t + \operatorname{sen} t\big) \cdot \big(-\operatorname{sen} t, \cos t, 0\big) \, dt \\ &=\; \int_0^{2\pi} -\operatorname{sen}^2 t \, dt \;=\; -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt \;=\; -\pi. \end{aligned}$$

4. Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do rotacional de $\mathbf{F}$ através da superfície S

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS$$

nos casos que se seguem.

(a) S o hemisfério superior (isto é, $z > 0$) da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) \;=\; \big(y,\, -x,\, yx^3\big)\,.$$

(b) S é a parte do plano $x + z = 1$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, em que a normal ν tem terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) \;=\; \big(x,\, -z,\, y\big).$$

(c) S é formada pelo topo e pelos quatro lados (<u>não</u> inclui a base) do cubo de vértices $\big(\pm 1,\, \pm 1,\, \pm 1\big)$, em que ν é a normal unitária exterior ao cubo e

$$\mathbf{F}(x, y, z) \;=\; \big(xyz,\, xy,\, x^2yz\big)\,.$$

Resolução:
(a) Dado que estamos nas condições do teorema de Stokes, pois $\mathbf{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S é uma superfície orientável, podemos utilizar este teorema.

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

sendo $\gamma = \partial S$ o bordo de S, orientado de forma compatível com a normal indicada. O caminho γ é a interseção da esfera com o plano $z = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 4$ percorrida em sentido direto (quando vista de cima); como tal, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo $\mathbf{F}(x, y, z) \;=\; (y,\, -x,\, yx^3)$, resulta pois que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \;&=\; \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma \\
&=\; \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&=\; \int_0^{2\pi} \big(2\operatorname{sen} t,\, -2\cos t,\, 16\operatorname{sen} t \cos^3 t\big) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\, dt \\
&=\; \int_0^{2\pi} \big(-4\operatorname{sen}^2 t - 4\cos^2 t\big)\, dt \;=\; -8\pi.
\end{aligned}$$

(b) Para determinar o bordo de S, calculamos a intersecção da superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$ com o plano $x+z=1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

Projetando ∂S no plano xy, obtém-se a circunferência $x(\theta)=\cos\theta$, $y(\theta)=\operatorname{sen}\theta$, onde $\theta\in[0,2\pi]$. Da equação do plano (que contém S e ∂S) $z=1-x$, pelo que a parametrização do bordo é:

$$\begin{cases} x(\theta)=\cos\theta \\ y(\theta)=\operatorname{sen}\theta \\ z(\theta)=1-\cos\theta \end{cases} \qquad \text{para } \theta\in[0,2\pi].$$

Temos então que o bordo tem a parametrização

$$\gamma(\theta)=\big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, 1-\cos\theta\big), \qquad \text{com} \quad \theta\in[0,2\pi].$$

Note que S é orientável e o seu bordo, γ, tem sentido compatível com a normal dada. Além disso, $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,-z,y)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\nu\, dS &= \oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\theta,\, \cos\theta-1,\, \operatorname{sen}\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta)\; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\cos^2\theta-\cos\theta+\operatorname{sen}^2 t\big)\; d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}2\theta\; d\theta}_{0} + \int_0^{2\pi} d\theta + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\; d\theta}_{0} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

(c) A superfície S é constituída por todas as faces do cubo, excepto a que está contida no plano $z=-1$. O seu bordo, ∂S, é formado por todas as arestas do cubo que estão contidas plano $z=-1$, sendo percorridas no sentido positivo em torno do eixo dos zz, compatível com a orientação de S.

sendo $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ o bordo de S orientado de forma compatível com a normal indicada. Desta forma, γ é a concatenação dos segmentos de reta que formam as arestas da parte inferior do cubo, e que são parametrizadas por:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (-1,\, -t,\, -1) \qquad \text{com } t\in[-1,1]; \\
\gamma_2(t) &= (t,\, -1,\, -1) \qquad \text{com } t\in[-1,1]; \\
\gamma_3(t) &= (1,\, t,\, -1) \qquad \text{com } t\in[-1,1]; \\
\gamma_4(t) &= (-t,\, 1,\, -1) \qquad \text{com } t\in[-1,1].
\end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (xyz,\, xy,\, x^2yz)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S uma superfície orientável cujo bordo é uma curva de Jordan, resulta do teorema de Stokes que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\nu\, dS &= \oint_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\gamma \\
&= \sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i}\mathbf{F}\cdot d\gamma \\
&= \int_{-1}^{1}(-t,t,t)\cdot(0,-1,0)\,dt + \int_{-1}^{1}(t,-t,t^2)\cdot(1,0,0)\,dt \\
&\quad + \int_{-1}^{1}(-t,t,-t)\cdot(0,1,0)\,dt + \int_{-1}^{1}(t,-t,-t^2)\cdot(-1,0,0)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\underbrace{(-t+t+t-t)}_{\substack{\shortparallel\\ 0}}\,dt \;=\; 0.
\end{aligned}$$

5. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho do campo vetorial $\mathbf{F}$ ao longo da curva C

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\gamma$$

onde:

(a) C é a curva de interseção do plano $z = 2$ com o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, percorrida no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0,0,5)$ e

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2-y,\, 4z,\, x^2\right).$$

(b) C é o triângulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, percorrido no sentido positivo quando visto do ponto $(5,5,5)$ e

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x+y^2,\, y+z^2,\, z+x^2\right).$$

Resolução:
(a) Pelo teorema de Stokes, temos que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\nu\, dS,$$

sendo S uma superfície cujo bordo é C e orientada de forma compatível com o sentido indicado para C. Observe-se que se pode usar qualquer superfície nessas condições. Assim sendo, e em vez da superfície cónica sugerida pelo enunciado, consideramos o círculo

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2<4,\, z=2\right\}.$$

Note-se que S é a base do cone $\sqrt{x^2+y^2} < z < 2$, pelo que o bordo de S coincide com C. Parametrizando S por

$$g(\rho,\theta) \;=\; \big(\rho\cos\theta,\, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\, 2\big) \qquad \text{com} \;\; \rho \in \,]0,2[\,, \;\; \theta \in \,]0,2\pi[\,,$$

a orientação associada a g é

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \;=\; (0,0,\rho).$$

Esta orientação é compatível com o sentido de S — que é o sentido direto, quando C é vista de $(0,0,5)$. Por outro lado:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} e_2 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} \;=\; (-4,-2x,1)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}\cdot d\gamma \;&=\; \iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot \nu\, dS \\ &=\; \int_0^2\int_0^{2\pi} \big(-4,\, -2\rho\cos\theta, 1\big)\cdot(0,0,\rho)\, d\theta\, d\rho \\ &=\; \int_0^2\int_0^{2\pi} \rho\, d\theta\, d\rho \;=\; 2\pi\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right) \;=\; 4\pi. \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes temos que

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\gamma \;=\; \iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\nu\, dS,$$

sendo S uma superfície cujo bordo é C e ν a normal a S compatível com o sentido indicado para C. Sendo que um vetor normal ao plano que contém os três vértices do triângulo é $(1,1,1)$, a equação deste plano é

$$(x-1,y,z)\cdot(1,1,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+y+z=1.$$

Consideramos a seguinte parametrização do triângulo:

$$g(x,y) = (x,y,1-x-y),$$

com g está definida na projeção do triângulo sobre o plano xy:

$$T = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0<x<1,\, 0<y<1-x\Big\}.$$

A orientação associada a esta parametrização é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \;=\; (1,1,1)\,,$$

sendo compatível com o sentido de C; note que em caso contrário bastaria tomar $-\overrightarrow{n}$ no lugar de $\overrightarrow{n}$, no cálculo que se segue.

Por outro lado:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y^2 & y+z^2 & z+x^2 \end{vmatrix} \;=\; (-2z,-2x,-2y) \;=\; -2(z,x,y).$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\gamma \;&=\; \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\nu\, dS \\
&=\; \iint_T -2(1-x-y,x,y)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy \\
&=\; -2\iint_T (\underbrace{1-x-y+x+y}_{\overset{\shortparallel}{1}})\,dx\,dy \\
&=\; -2\iint_T dx\,dy \;=\; -2\ \mathrm{Vol}_2(T) \;=\; -2\left(\tfrac{1}{2}\right) \;=\; -1.
\end{aligned}$$

6. Considere o campo vetorial

$$\mathbf{G}(x,y,z) \;=\; \big(yz,\ -xz,\ z^2\big)$$

e a superfície

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2=1+z\ ,\ 0<z<1\Big\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de $\mathbf{G}$ através de S, segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

(a) o teorema de Stokes;

(b) o teorema da divergência.

Resolução:
(a) A superfície S é dada por $z = x^2+y^2-1$, com

$$0<z<1 \qquad\Rightarrow\qquad 0<x^2+y^2-1<1 \qquad\Rightarrow\qquad 1<x^2+y^2<2.$$

Podemos pois parametrizá-la por

$$g(x,y) \;=\; \big(x,\ y,\ x^2+y^2-1\big),$$

com g definida na coroa circular

$$A \;=\; \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<2\Big\}.$$

Um vetor normal a S é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \;=\; \big(-2x,\, -2y,\, 1\big)$$

Como necessitamos da normal a S com terceira componente negativa, tomamos $-\overrightarrow{n}$. Em consequência, para obter uma parametrização para o bordo de S que seja compatível com esta orientação precisamos que a fronteira de ∂A, que designamos por γ, seja percorrida no sentido inverso.

Como tal, consideramos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, onde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \big(\sqrt{2}\cos t,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\big), \qquad t \in [0, 2\pi], \\ \gamma_2(t) &= \big(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t\big), \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Resulta então que o bordo de S é $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= g \circ \gamma_1(t) = \big(\sqrt{2}\cos t,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, 1\big), \qquad t \in [0, 2\pi], \\ \Gamma_2(t) &= g \circ \gamma_2(t) = \big(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t,\, 0\big), \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema de Stokes, e notando que $\mathbf{G} = 0$ em Γ_2, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathrm{rot}\, \mathbf{G} \cdot \nu \, dS &= \int_\Gamma \mathbf{G} \cdot d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \mathbf{G} \cdot d\Gamma_1 + \underbrace{\int_{\Gamma_2} \mathbf{G} \cdot d\Gamma_2}_{\overset{\shortparallel}{0}} \\ &= \int_0^{2\pi} \big(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, -\sqrt{2}\cos t,\, 1\big) \cdot \big(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, -\sqrt{2}\cos t,\, 0\big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(2\,\mathrm{sen}^2 t + 2\cos^2 t\big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\, dt = 4\pi. \end{aligned}$$

(b) Uma vez que o teorema da divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios abertos e limitados, acrescentamos à superfície S os círculos

$$\begin{aligned} T_1 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 0 \;\text{ e }\; x^2 + y^2 \le 2\Big\} \\ T_2 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 1 \;\text{ e }\; x^2 + y^2 \le 1\Big\}. \end{aligned}$$

Em linguagem informal, podemos dizer que T_1 é a "tampa" do sólido D e T_2 o seu "fundo", onde

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 < 1 + z \;\text{ e }\; 0 < z < 1\Big\}.$$

Assim sendo, $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$. Sendo

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} \;=\; (x, y, -2z),$$

aplicamos agora o teorema da divergência ao campo vetorial rot $\mathbf{G}$, por forma a verificarmos que o fluxo deste campo é, de facto, nulo:

$$\iint_{\partial D} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS \;=\; \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{G})}_{\overset{\shortparallel}{0}} \, dV \;=\; 0.$$

Por outro lado, como $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$:

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS + \iint_{T_1} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS + \iint_{T_2} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_{\partial D} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS \;=\; 0.$$

Utilizando

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &= (x, y, 1) \qquad \text{definida em } D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2\}, \\ g_2(x, y) &= (x, y, 0) \qquad \text{definida em } D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \end{aligned}$$

como parametrizações de T_1 e T_2, respectivamente, resulta assim que:

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS &= -\iint_{T_1} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS \;-\; \iint_{T_2} \operatorname{rot} \mathbf{G} \cdot \nu \, dS \\ &= -\iint_{D_1} (x, y, -2) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy \;-\; \iint_{D_2} \underbrace{(x, y, 0) \cdot (0, 0, -1)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \, dx \, dy \\ &= 2 \iint_{D_1} dx \, dy \;=\; 2\pi \left(\sqrt{2}\right)^2 \;=\; 4\pi. \end{aligned}$$

7. Obtenha um potencial vetorial dos seguintes campos.

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, z, 3x)$,

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(yz, x, xy^2\big)$.

Resolução:

(a) Para que exista tal campo é necessário que div $\mathbf{F} = 0$. Então

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\big(-y\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(z\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(3x\big) \;=\; 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

pelo que se confirma que existe um campo vetorial $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de $\mathbf{F}$ são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, sendo $\mathbb{R}^3$ simplesmente conexo) tal que

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}. \tag{1}$$

Para determinar $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$, determinamos uma solução da equação (1):

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \;=\; \big(-y, z, 3x \big).
\end{aligned}$$

Assim, vamos calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 3x. \end{cases}$$

Sabemos que existe uma solução deste sistema tal que uma das componentes, G_1, G_2 ou G_3, é nula. Podemos considerar, por exemplo, $G_1(x, y, z) \equiv 0$, e assim

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} = 3x. \end{cases}$$

Integrando a terceira e a segunda equações em ordem a x obtém-se:

$$\begin{aligned}
G_2(x, y, z) &= \int 3x \, dx + A_1(y, z) &&= \frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z) \\
G_3(x, y, z) &= -\int z \, dx + A_2(y, z) &&= -xz + A_2(y, z).
\end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(-xz + A_2(y, z) \big) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z) \right) \;=\; -y\,,$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_2(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_1(y, z)}{\partial z} \;=\; -y\,. \tag{2}$$

Precisamos pois de determinar funções $A_1(y, z)$ e $A_2(y, z)$ que verifiquem a equação (2). Dado que temos uma equação e duas incógnitas, existem certamente soluções tais que $A_1(y, z) \equiv 0$ (por exemplo). Desta forma, resta determinar $A_2(y, z)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(y, z))}{\partial y} \;=\; -y.$$

Primitivando em ordem a y, obtém-se

$$A_2(y,z) = \int (-y)\,dy + B(z) = -\frac{y^2}{2} + B(z)\,.$$

Em conclusão,

$$G_2(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2, \qquad G_3(x,y,z) = -xz - \frac{y^2}{2} + B(z)\,,$$

ou seja,

$$G(x,y,z) = \left(0, \frac{3}{2}x^2, -xz - \frac{y^2}{2} + B(z)\right),$$

com $B(z)$ qualquer função de classe C^1.

Observação. Note que o problema pede *apenas um* potencial vetorial e não *todos* os possíveis potenciais vetoriais, de $\mathbf{F}$; para resolver este último problema não poderíamos ter feito as sucessivas escolhas que facilitam os cálculos, mas restringem o conjunto de funções onde se procura a solução. No entanto, do ponto de vista as aplicações, é em geral apenas necessária a determinação de um potencial vetorial, e não de todos.

(b) Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, o que é claramente verdadeiro em $\mathbb{R}^3$. Podemos assim concluir que existe um campo vetorial $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de $\mathbf{F}$ são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo) tal que $\operatorname{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Para determinar $\mathbf{G}$ vamos considerar $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Então

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) = \big(yz, x, xy^2\big).$$

Assim temos que calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = x \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Podemos considerar (por exemplo) $G_3(x,y,z) \equiv 0$ e, assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial z} = -yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} = x \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Primitivando a primeira e a segunda equação em ordem a z, obtemos

$$\begin{aligned} G_2(x,y,z) &= \int -yz\,dz + A_1(x,y) &&= -\frac{yz^2}{2} + A_2(x,y) \\ G_1(x,y,z) &= \int x\,dz + A_2(x,y) &&= xz + A_1(x,y). \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{yz^2}{2}+A_2(x,y)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\big(xz+A_1(x,y)\big) \;=\; xy^2,$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial A_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial A_1(x,y)}{\partial y} \;=\; xy^2.$$

Resta pois o problema de determinar funções $A_1(x,y)$ e $A_2(x,y)$ que verifiquem a equação acima. Mais uma vez para simplificar os cálculos, podemos (por exemplo) procurar soluções tais que $A_1(x,y)\equiv 0$. Vamos então determinar $A_2(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(x,y)}{\partial x} \;=\; xy^2.$$

Primitivando em ordem a x, obtemos

$$A_2(x,y)=\int xy^2dx+B(y)=\frac{x^2y^2}{2}+B(y).$$

Dado que $B(y)$ é uma função arbitrária, podemos escolher $B(y)=0$ (por exemplo). Um potencial vetorial para $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ é:

$$\mathbf{G}(x,y,z)=\left(xz,-\frac{yz^2}{2}+\frac{x^2y^2}{2},0\right).$$

Neste tipo de problemas, pode ser boa ideia verificar, no final, que de facto $\operatorname{rot}\mathbf{G}=\mathbf{F}$ (fica como exercício para o aluno).

8. Considere a superfície definida por

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2=1\,,\; z>0\Big\}$$

orientada segundo a normal unitária $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ tal que $\nu_3>0$.

(a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de

$$\mathbf{H}(x,y,z) \;=\; \big(xz,\, yz,\, -z^2+1\big)$$

através de S (no sentido de ν).

(b) Calcule o fluxo de

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; \big(x+y^3z,\, y,\, z\big)$$

através de S (no sentido de ν).

Resolução:
(a) $\mathbf{H}$ está definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ (um conjunto em estrela) e a sua divergência é

$$\operatorname{div}\mathbf{H}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-z^2+1) = z + z - 2z = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Assim sendo existe (pelo menos um) potencial vetorial $\mathbf{\Phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi} = \mathbf{H}$.

Sendo $\mathbb{R}^3$ um conjunto em estrela, fazemos o cálculo de um potencial vetorial pela fórmula integral:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(x,y,z) &= \int_0^1 \mathbf{H}(tx,ty,tz) \times (tx,ty,tz)\, dt \\
&= \int_0^1 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t^2xz & t^2yz & -t^2z^2+1 \\ tx & ty & tz \end{vmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \Big(2t^3yz^2 - ty,\ -2t^3xz^2 + tx,\ 0 \Big)\, dt \\
&= \Big(yz^2,\ -xz^2,\ 0 \Big) \underbrace{\int_0^1 2t^3\, dt}_{\substack{\| \\ 1/2}} + \Big(-y,\ x,\ 0 \Big) \underbrace{\int_0^1 t\, dt}_{\substack{\| \\ 1/2}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(y\left(z^2-1\right),\ x\left(1-z^2\right),\ 0 \Big).
\end{aligned}$$

Parametrizando o bordo de S, ∂S, por

$$\gamma(t) = \big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, 0\big) \qquad \theta \in [0, 2\pi],$$

e aplicando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{H}\cdot\nu\, dS &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot\nu\, dS = \int_\gamma \mathbf{\Phi}\cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{\Phi}\big(\gamma(\theta)\big)\cdot\gamma'(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta,\, 0\big)\cdot\big(-\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta,\, 0\big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta\big)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

Note-se que, sem a exigência do uso do teorema de Stokes, este fluxo seria até mais facilmente calculado com recurso apenas ao teorema da divergência, tal como na alínea seguinte.

(b) Note que, neste caso, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$ e, por isso, não há potencial vetorial para F. No entanto, e tendo em conta que $\operatorname{div}\mathbf{F}$ é constante, é proveitoso usar o teorema da divergência. Seja E o hemisfério norte da bola de raio centrada na origem, isto é, $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1,\ z > 0\}$. Então

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \;=\; \iiint_E 3\,dV \;=\; 3\operatorname{Vol}_3(E) \;=\; 3\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\pi.$$

Por outro lado, sendo a fronteira de E, $\partial E = S + T$, onde $T = \{(x,y,0) : x^2+y^2 < 1\}$, o fluxo através de T é também fácil de calcular:

$$\iint_T \mathbf{F}\cdot\nu\,dS \;=\; \iint_T \big(x+y^2z,\ y,\ z\big)\cdot(0,0,-1)\,dS \;=\; \iint_T -z\,dS = 0$$

(pois $z = 0$ em T).

Finalmente, pelo teorema da divergência:

$$\begin{aligned} 2\pi \;&=\; \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \\ &=\; \iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS + \underbrace{\iint_T \mathbf{F}\cdot\nu\,dS}_{\overset{\shortparallel}{0}} \;=\; \iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS. \end{aligned}$$

9. Seja C um caminho fechado e simples que pertence ao plano $x+y+z=1$ e é percorrido no sentido direto quando visto do ponto $(0,0,10)$. Mostre que o integral de linha

$$\oint_C z dx - 2x dy + 3y dz$$

depende apenas da área da região do plano $x+y+z=1$ delimitada por C.

Resolução: Seja S a região interior à curva C no plano

$$x+y+z=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 1-x-y.$$

Vamos parametrizar S por

$$g(x,y) \;=\; (x,y,1-x-y), \qquad (x,y)\in P\subset\mathbb{R}^2,$$

onde P é a projeção de S no plano coordenado $z=0$, ou seja, o triângulo

$$P \;=\; \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<1, 0<y<1-x\Big\}.$$

A orientação associada a esta parametrização,

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial y} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \;=\; (1,1,1), \qquad \nu \;=\; \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

é compatível com o sentido prescrito para C. Por outro lado, considerando o campo dado, $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -2x, 3y)$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = (3, 1, -2).$$

Pelo teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \oint_C z dx - 2x dy + 3y dz &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\gamma = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_S (3, 1, -2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \, dS = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}} \, dS = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Vol}_2(S). \end{aligned}$$

Comentário: note que se a curva fosse percorrida no sentido contrário ao que foi prescrito, o valor do integral seria $-\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Vol}_2(S)$. O integral depende apenas do sentido da curva e da área da região do plano delimitada por C; para além desta dependência, o integral não é função nem da "forma" da curva nem da sua posição no plano.