

Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 3 - 18 a 24 de Setembro de 2025

1. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

através da superfície S definida por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$ orientada para fora.

Resolução: Trata-se de uma porção do parabolóide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$ situada acima do plano $z = 0$. Assim, podemos considerar para esta superfície a parametrização

$$g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$$

com $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, dado que a interseção de $z = 1 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, -2u) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Como tal, a expressão geral do vetor normal a S necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\vec{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que a superfície S é orientada para fora, devemos usar este vetor $\vec{N}$ e não o seu simétrico $-\vec{N} = (-2u, -2v, -1)$. O fluxo do campo de $\mathbf{F}$ através de S é então dado por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \iint_D (u, v, 1 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) \, du \, dv = \iint_D (u^2 + v^2 + 1) \, du \, dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, usamos coordenadas polares, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$ para o cálculo do integral duplo (note que o jacobiano desta transformação de coordenadas é ρ) de onde resulta que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 1) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

2. Mostre que 36π é o valor do fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$$

através da superfície esférica S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ orientada para fora de S .

Resolução: Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície S pode ser parametrizada por

$$g(\theta, \phi) = (3 \sin \phi \cos \theta, 3 \sin \phi \sin \theta, 3 \cos \phi)$$

para $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\phi \in]0, \pi[$. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-3 \sin \phi \sin \theta, 3 \sin \phi \cos \theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = (3 \cos \phi \cos \theta, 3 \cos \phi \sin \theta, -3 \sin \phi)$$

Como tal, a expressão do vetor normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -3 \sin \phi \sin \theta & 3 \sin \phi \cos \theta & 0 \\ 3 \cos \phi \cos \theta & 3 \cos \phi \sin \theta & -3 \sin \phi \end{vmatrix} \\ &= (-9 \sin^2 \phi \cos \theta, -9 \sin \theta \sin^2 \phi, -9 \cos \phi \sin \phi) \end{aligned}$$

Para que a superfície tenha orientação para fora há que considerar o vetor normal

$$-\vec{N} = (9 \sin^2 \phi \cos \theta, 9 \sin \theta \sin^2 \phi, 9 \cos \phi \sin \phi)$$

que “aponta para cima” no hemisfério norte (onde $\phi \in]0, \pi/2[$) e “aponta para baixo” no hemisfério sul (onde $\phi \in]\pi/2, \pi[$). O fluxo do campo $\mathbf{F}$ ao longo da superfície S é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \iint_D (0, 0, z(\theta, \phi)) \cdot (-\vec{N}(\theta, \phi)) \, d\theta \, d\phi \\ &= \iint_D (3 \cos \phi) (9 \cos \phi \sin \phi) \, d\theta \, d\phi \\ &= 27 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi \cos^2 \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 27 \cdot 2\pi \cdot \left. \frac{-\cos^3 \phi}{3} \right|_0^\pi = 27 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \\ &= 36\pi. \end{aligned}$$

3. Seja f um campo escalar de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{F}$ um campo vetorial $C^2(\mathbb{R}^3)$. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique porquê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

- (a) $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F})$
- (b) $\nabla f \times (\text{div } \mathbf{F})$

Resolução:

(a) Sendo $\mathbf{F}$ um campo vetorial de classe C^2 , $\text{rot } \mathbf{F}$ está bem definido

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

e representa um campo vetorial. Sendo assim $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{F})$ está bem definido e é também um campo vetorial.

(b) Sendo f um campo escalar de classe C^2 , o gradiente de f está bem definido e representa um campo vetorial. Por outro lado, sendo $\mathbf{F}$ um campo vetorial $\text{div } \mathbf{F}$ está bem definido e representa um campo escalar. Atendendo a que o produto externo é uma operação definida entre dois vetores em $\mathbb{R}^3$ mas $\text{div } \mathbf{F}$ é um escalar e não um vetor, então $\text{grad } f \times \text{div } \mathbf{F}$ não está definido.

4. Determine o rotacional e a divergência dos campo vetoriais definidos por

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z) \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz, 0, -x^2y)$

Resolução:

(a) Seja $r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Então

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

Identicamente,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Desta forma, e como $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, tem-se que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \left(-\frac{z}{r^2} + \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2} - \frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2} + \frac{x}{r^2} \right) = (0, 0, 0)$$

e

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \\
 &= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} \\
 &= \frac{3r - \frac{x^2+y^2+z^2}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.
 \end{aligned}$$

(b) Tem-se que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & -x^2y \end{vmatrix} = (-x^2, 3xy, -xz)$$

e

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y) = yz.$$

5. Verifique as seguintes igualdades (para $r > 0$):

(a) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

(b) $\operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$, sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

Resolução:

(a) Sendo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) \\
 &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 &= \frac{\mathbf{r}}{r}.
 \end{aligned}$$

(b) Tem-se que (utilizando os cálculos das derivadas parciais de r , da resolução de 4(a)):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(r\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(xr) + \frac{\partial}{\partial y}(yr) + \frac{\partial}{\partial z}(zr) \\
 &= r + x \frac{x}{r} + r + y \frac{y}{r} + r + z \frac{z}{r} \\
 &= 3r + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = 4r.
 \end{aligned}$$

6. Sejam f, g campos escalares e $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ campos vetoriais. Demonstre as identidades, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas.

(a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

(b) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Resolução: Suponhamos que $\mathbf{F} = (P_1, Q_1, R_1)$ e $\mathbf{G} = (P_2, Q_2, R_2)$.

(a) Temos que

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (Q_1 R_2 - Q_2 R_1, P_2 R_1 - P_1 R_2, P_1 Q_2 - Q_1 R_2)$$

Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \frac{\partial(Q_1 R_2 - Q_2 R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2 R_1 - P_1 R_2)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)}{\partial z} \\ &= Q_1 \frac{\partial R_2}{\partial x} + R_2 \frac{\partial Q_1}{\partial x} - Q_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} - R_1 \frac{\partial Q_2}{\partial x} + R_1 \frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} \\ &\quad - R_2 \frac{\partial P_1}{\partial y} - P_1 \frac{\partial R_2}{\partial y} + P_1 \frac{\partial Q_2}{\partial z} + Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial z} - Q_2 \frac{\partial P_1}{\partial z} - Q_1 \frac{\partial P_2}{\partial z} \\ &= P_1 \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + Q_1 \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z} \right) + R_1 \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x} \right) \\ &\quad + P_2 \left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} \right) + R_2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) \\ &= -\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

(b) Da alínea anterior, temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot \operatorname{rot}(\nabla f) - \nabla f \cdot \operatorname{rot}(\nabla g)$$

Se f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ então $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. Deste resultado, obtemos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot 0 - \nabla f \cdot 0 = 0.$$

7. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z)),$$

em que f, g e h são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, é irrotacional.

Resolução: Basta mostrar que $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & g(y) & h(z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} h(z) - \frac{\partial}{\partial z} g(y), \frac{\partial}{\partial z} f(x) - \frac{\partial}{\partial x} h(z), \frac{\partial}{\partial x} g(y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x) \right) \\ &= (0, 0, 0),\end{aligned}$$

como se queria mostrar.

8. Existirá um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot } \mathbf{G} = (x \sin y, \cos y, z - xy)$? Justifique.

Resolução: Sabemos que se $\mathbf{G}$ é um campo vetorial de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$, então $\text{div}(\text{rot } \mathbf{G}) = 0$.

Mas, o campo vetorial dado $(x \sin y, \cos y, z - xy)$ tem por divergência

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z - xy) = \sin y - \sin y + 1 = 1$$

pelo que não poderá existir $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\text{rot } \mathbf{G} = (x \sin y, \cos y, z - xy)$.

9. Verifique a conclusão do Teorema da Divergência para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região V , onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z)$$

e V é o sólido limitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

Resolução: Há que verificar que

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$$

em que V é o sólido dado, S a superfície da sua fronteira e ν a normal unitária exterior a S . Começemos por calcular o integral triplo de $\text{div } \mathbf{F} = 3x + 1$. Dado que V é o sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ teremos que o sólido é o conjunto de pontos (x, y) tais que $(x, y) \in D = B_2(0, 0) = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$. Assim

$$\iiint_V (3x + 1) dV = \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} (3x + 1) dz dxdy = \iint_D (3x + 1)(4 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Mudando para coordenadas polares, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, temos que

$$\iiint_V (3x + 1) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3\rho \cos \theta + 1)(4 - \rho^2) \rho d\theta d\rho = 8\pi.$$

Por outro lado, $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1 é a superfície do parabolóide, $z = 4 - x^2 - y^2$, com $(x, y) \in D$ e S_2 é o círculo D no plano $z = 0$. Assim

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \nu_2 dS$$

É fácil de entender que $\nu_2 = (0, 0, -1)$ pelo que $\mathbf{F} \cdot \nu_2 = z$ e dado que em S_2 se tem $z = 0$ obtemos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \nu_2 dS = 0$$

Por outro lado, S_1 pode ser parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2) \quad , \quad (u, v) \in D$$

e a normal a S_1 necessária ao cálculo do fluxo é

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que a normal exterior a S_1 tem terceira componente positiva, usaremos $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ para o cálculo do integral. Então

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 dS &= \iint_D (u^2, uv, 4 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du dv \\ &= \iint_D (2u^3 + 2uv^2 + 4 - u^2 - v^2) du dv. \end{aligned}$$

Fazendo a transformação para coordenadas polares ($u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$) obtém-se

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + 4 - r^2) r d\theta dr = 8\pi.$$

como se pretendia.

Para o cálculo expedito do integral anterior, note que se f é uma função periódica de média zero então

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

sendo $b - a$ o período de f . Como exemplos:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt = 0.$$

10. Use o Teorema da divergência para calcular o valor de

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$$

em que

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(\pi x), zy^3, z^2 + 4x)$ e S é a superfície da fronteira do paralelepípedo $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$ e $1 \leq z \leq 4$.
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz, 1 - 4xy^2, 2z - z^2)$ e S é a superfície da fronteira do sólido limitado por $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$ e o plano $z = 0$.
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-2xy, y^2, 3z)$ e S a superfície que limita o sólido

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq x + y\}.$$

Resolução:

(a) Vamos usar o Teorema da divergência na seguinte forma:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

sendo E o paralelepípedo limitado pelos planos $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 1$ e $z = 4$. Temos então que os limites de integração serão

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 4.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin(\pi x)) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 4x) = \pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z.$$

Basta-nos agora calcular o integral

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \int_{-1}^2 \int_0^1 \int_1^4 (\pi \cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z) dz dy dx \\ &= \frac{135}{2}. \end{aligned}$$

(b) Vamos usar o Teorema da divergência:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV,$$

sendo E o sólido limitado pela superfície do parabolóide $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$, $z \geq 0$. Assim,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 3, 0 < z < 6 - 2x^2 - 2y^2\}$$

ou, usando coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$:

$$E = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \rho < \sqrt{3}, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < 6 - 2\rho^2\}.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(1 - 4xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z - z^2) = 2z - 8xy + 2 - 2z = 2 - 8xy.$$

Assim

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} dV \\ &= \iiint_E (2 - 8xy) dV \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\rho^2} (2 - 8\rho^2 \cos \theta \sin \theta) \rho dz d\theta d\rho \\ &= 18\pi. \end{aligned}$$

(c) Vamos usar o Teorema da divergência na forma:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F} dV$$

sendo B a bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ com $z \geq x + y$, ou seja acima do plano $z = x + y$. Note-se que iremos calcular o integral triplo de

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = -2y + 2y + 3 = 3$$

em

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } x + y < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Usando coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

onde $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\rho(\cos \theta + \sin \theta) \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2}$, temos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \iiint_B 3 dV = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho(\cos \theta + \sin \theta)}^{\sqrt{1 - \rho^2}} \rho dz d\theta d\rho = 2\pi.$$

11. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução: A superfície S em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e tem um vector normal num ponto (x, y, z) da forma (x, y, z) (o qual aponta para “fora”). Observe que a função integranda é

$$2x + 2y + z^2 = (2, 2, z) \cdot (x, y, z) = (2, 2, z) \cdot \boldsymbol{\nu},$$

pois a normal unitária em cada ponto de ∂B é

$$\nu = \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\|\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\|} = \frac{1}{2}(2x, 2y, 2z) = (x, y, z).$$

Desta forma o integral que se pretende calcular é de facto o fluxo do campo $(2, 2, z)$ através da superfície da esfera S que limita a bola B . Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned} \iint_S (2x + 2y + z^2) dS &= \iint_S (2, 2, z) \cdot (x, y, z) dS \\ &= \iiint_B \operatorname{div}(2, 2, z) dV \\ &= \iiint_B dV = \operatorname{Vol}_3(B) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

12. Seja f um campo escalar de classe C^1 e g um campo escalar de classe C^2 ambos definidos num conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$. Demonstre a seguinte igualdade, (designada *primeira fórmula de Green*), onde E é um sólido simples cujo fecho está contido em A e S a sua fronteira:

$$\iint_S f \nabla g \cdot \nu dS = \iiint_E (f \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$$

Resolução: Note que, por aplicação do teorema da divergência

$$\iint_S (f \nabla g) \cdot \nu dS = \iiint_E \operatorname{div}(f \nabla g) dV$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f \nabla g) &= \operatorname{div}\left(f \frac{\partial g}{\partial x}, f \frac{\partial g}{\partial y}, f \frac{\partial g}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z} + f \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g \end{aligned}$$

o resultado fica, assim, demonstrado.