

Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 2 - 11 a 17 de Setembro de 2025

1. Calcule o integral de superfície de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4}$ sendo S a porção do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xOy .

Resolução: Começamos por parametrizar a superfície. Dado que a interseção do parabolóide com o plano $z = 0$ é $x^2 + y^2 = 9$, consideraremos a parametrização

$$g(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2, \end{cases}$$

em que $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$. Sendo assim

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_T f(x, y) \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \|(2x, 2y, 1)\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} dx dy \\ &= \iint_T 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4} dx dy \\ &= 2 \iint_T (x^2 + y^2 + \frac{1}{4}) dx dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares neste último integral em $T \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

em que $0 < \rho < 3$ e $0 < \theta < 2\pi$,

$$\iint_S f dS = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (\rho^2 + \frac{1}{4}) \rho d\rho d\theta = 4\pi \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{8} \right) \Big|_0^3 = \frac{171}{2} \pi.$$

2. Determine a área da superfície dada por

- (a) A parte inferior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (b) $z = x^2 + y^2$ com $z < 1$.
- (c) A fronteira do sólido limitado pelas superfícies $z = 1$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 1$ e $z = x^2 + y^2$.

Resolução:

(a) Sejam

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

Note-se que na esfera $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$. A interseção da esfera com o cone é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2 + z^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1,$$

pois $z \geq 0$. Logo,

$$1 = \sqrt{2} \sin \phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \pi/4.$$

Para a parte da esfera que está abaixo do cone, temos pois que $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$. Assim sendo,

$$r(\phi, \theta) = (\sqrt{2} \sin \phi \cos \theta, \sqrt{2} \sin \phi \sin \theta, \sqrt{2} \cos \phi),$$

com $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$ e $0 < \theta < 2\pi$. Desta forma

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (\sqrt{2} \cos \phi \cos \theta, \sqrt{2} \cos \phi \sin \theta, -\sqrt{2} \sin \phi)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-\sqrt{2} \sin \phi \sin \theta, \sqrt{2} \sin \phi \cos \theta, 0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2} \cos \phi \cos \theta & \sqrt{2} \cos \phi \sin \theta & -\sqrt{2} \sin \phi \\ -\sqrt{2} \sin \phi \sin \theta & \sqrt{2} \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2 \sin^2 \phi \cos \theta, 2 \sin^2 \phi \sin \theta, 2 \sin \phi \cos \phi). \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + 4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + 4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = 2 |\sin \phi| = 2 \sin \phi$$

(pois $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$). Assim,

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2 \sin \phi d\phi d\theta = 2\pi(2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

(b) A superfície S é uma porção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Uma parametrização de S é

$$g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

com $D = \{u^2 + v^2 < 1\}$, e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1).$$

A área de superfície pedida é

$$Vol_2(S) = \iint_S \|(2u, 2v, 1)\| dS = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} du dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, podemos usar coordenadas polares ($x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$) pelo que

$$Vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

(c) O sólido é a parte interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ e exterior à superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ compreendida entre os planos horizontais $z = 1$ e $z = 4$. O seu topo, que designamos por S_T , é a coroa circular

$$1 < x^2 + y^2 < 4 \quad \text{contida no plano } z = 4;$$

a superfície (lateral) interior, S_1 , é a face do cilindro dada por $x^2 + y^2 = 1$ e a superfície (lateral) exterior, S_2 , é o parabolóide $z = x^2 + y^2$, ambas entre os planos $z = 1$ e $z = 4$. Intersectando tanto o parabolóide como o cilindro com o plano $z = 1$ obtém-se a mesma curva: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Assim, a base do sólido é uma curva que, como tal, não contribui para o valor da área. Assim sendo, e executando desde já o cálculo (elementar!) das áreas de S_T e S_1 :

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= Vol_2(S_T) + Vol_2(S_1) + Vol_2(S_2) \\ &= (\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2) + (2\pi \cdot 1) \cdot 3 + Vol_2(S_2) \\ &= 9\pi + Vol_2(S_2) \end{aligned}$$

Quanto à área de S_2 sabemos que

$$Vol_2(S_2) = \iint_{S_2} dS$$

Para calcular o integral, vamos começar por parametrizar a superfície. Em coordenadas cartesianas

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

onde $g : T \rightarrow S_2$, com $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Assim:

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \iint_T \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y} \right\| dx dy \\ &= \iint_T \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy. \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4r^2 + 1)^{1/2} r \, dr \, d\theta \\ &= 2\pi \frac{2}{3 \cdot 8} \left(4r^2 + 1\right)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}). \end{aligned}$$

Finalmente

$$Vol_2(S) = 9\pi + \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}).$$

3. Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ (com fronteira de medida nula e interior não-vazio). Mostre que a área da superfície $z = f(x, y)$, correspondente ao gráfico de f para $(x, y) \in K$, é dada pela fórmula

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy$$

Aproveite o resultado para determinar a área da porção do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução: Uma parametrização da superfície, que designamos por S , é $g : K \rightarrow S$ dada por

$$g(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

A área de S é, pois, dada por

$$A = \iint_S dS = \iint_K \left\| \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

Temos assim que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Desta forma

$$A = \iint_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dx \, dy,$$

que é a fórmula pretendida.

Vamos aplicar esta fórmula ao cálculo pedido. Temos que

$$z = f(x, y) = y^2 - x^2$$

com $D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2} dx dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

pelo que $0 < \theta < 2\pi$ e $1 < r < 2$. Então

$$A = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr.$$

Tal como na alínea (c) do exercício resolvido anterior, a primitiva de $\sqrt{1 + 4r^2} r = (1 + 4r^2)^{1/2} r$ é imediata, dada por $\frac{2}{3 \cdot 8} (1 + 4r^2)^{3/2}$. Então

$$A = 2\pi \frac{2}{3 \cdot 8} \left(1 + 4r^2\right)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{6} (17^{3/2} - 5^{3/2}).$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 ; 1 < y < 4\}.$$

Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + z^2)}$ calcule a massa total de S .

Resolução: A massa de S é dada pelo integral

$$M(S) = \int_S \alpha dS.$$

Considerando a parametrização

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho^2, \rho \sin \theta) \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \quad , \quad 1 < \rho < 2$$

tem-se então que

$$M(S) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho, \theta)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 (1 + 4\rho^2) \rho d\rho = 33\pi.$$