

Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semanas 13 e 14 - 15 a 19 de Dezembro de 2025, 5 a 9 de Janeiro de 2026

1. Use o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 2e^{-x}\text{sen}(4\pi x) - 9e^{-x}\text{sen}(7\pi x) & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Resolução: A equação e as condições de fronteira são homogêneas. Podemos, por isso, construir novas soluções por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira homogêneas. Isto é o princípio da sobreposição.

Usamos então o método de separação de variáveis para construir soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, para $0 < x < 1$ e $t > 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possível se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes x e t , forem ambas iguais a uma constante, digamos λ . Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X''(x) + 2X'(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

A primeira equação é uma simples equação linear homogênea de primeira ordem para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A segunda equação pode ser escrita como

$$(D^2 + 2D - \lambda)X(x) = 0,$$

cujas raízes são $-1 \pm \sqrt{1 + \lambda}$. Assim, dependendo do sinal de $1 + \lambda$ temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{-x}e^{\sqrt{1+\lambda}x} + Ce^{-x}e^{-\sqrt{1+\lambda}x} & \text{se } \lambda > -1 \\ Bxe^{-x} + Ce^{-x} & \text{se } \lambda = -1 \\ Be^{-x}\cos(\sqrt{-1-\lambda}x) + Ce^{-x}\text{sen}(\sqrt{-1-\lambda}x) & \text{se } \lambda < -1. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogêneas $u(0, t) = u(1, t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas implicam que

$$X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > -1$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{-1}e^{\sqrt{1+\lambda}} + Ce^{-1}e^{-\sqrt{1+\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ Be^{-1} + Ce^{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < -1$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ Be^{-1}\cos\sqrt{-1-\lambda} + Ce^{-1}\text{sen}\sqrt{-1-\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-1-\lambda} = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos os valores próprios $\lambda_n = -1 - n^2\pi^2$, com $n = 1, 2, 3, \dots$, e as correspondentes funções próprias não nulas $X_n(x) = Ce^{-x} \text{sen}(n\pi x)$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A e^{-x} \text{sen}(n\pi x) e^{(-1-n^2\pi^2)t}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, 3, \dots$

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma “combinação linear infinita” das soluções obtidas acima:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x} \text{sen}(n\pi x) e^{(-1-n^2\pi^2)t}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x, 0) = 2e^{-x}\text{sen}(4\pi x) - 9e^{-x}\text{sen}(7\pi x)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-x} \text{sen}(n\pi x) = 2e^{-x}\text{sen}(4\pi x) - 9e^{-x}\text{sen}(7\pi x)$$

pelo que se conclui imediatamente que a série se resume à soma de dois termos apenas, com $n = 4$ e $n = 7$ e com os correspondentes coeficientes $c_4 = 2$ e $c_7 = -9$, e portanto a solução é

$$u(x, t) = 2e^{-x} \text{sen}(4\pi x) e^{(-1-16\pi^2)t} - 9e^{-x} \text{sen}(7\pi x) e^{(-1-49\pi^2)t}.$$

2. Usando o método de separação de variáveis, determine a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - e^{-2t}u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 4\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{11x}{2}\right) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Solução: Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogêneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(x, t) = X(x)T(t)$, para $0 < x < \pi$ e $t > 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$X(x)T'(t) - e^{-2t}X(x)T(t) - X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - e^{-2t} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possível se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes x e t , forem ambas iguais a uma constante, digamos λ . Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = (\lambda + e^{-2t})T(t) \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogênea para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t - \frac{e^{-2t}}{2}} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A expressão para as soluções da segunda equação depende do sinal de λ . Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\sin\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogêneas $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas implicam que

$$X'(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}B - \sqrt{\lambda}C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\pi + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}\pi + C\sin\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

donde obtemos os valores próprios $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2$ negativos, com $n = 0, 1, 2, \dots$, e as correspondentes funções próprias não nulas $X_n(x) = B\cos((n + \frac{1}{2})x)$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)e^{-(\frac{2n+1}{2})^2t - \frac{e^{-2t}}{2}}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 0, 1, 2, \dots$

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma “combinação linear infinita” das soluções obtidas acima:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)e^{-(\frac{2n+1}{2})^2t - \frac{e^{-2t}}{2}}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x, 0) = 4\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{11x}{2}\right)$ obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}} = 4\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{11x}{2}\right)$$

pelo que se conclui imediatamente que a série se resume à soma de dois termos apenas, com $n = 3$ e $n = 5$ e com os correspondentes coeficientes a satisfazer as duas relações $a_3 e^{-\frac{1}{2}} = 4$ e $a_5 e^{-\frac{1}{2}} = -2$, donde

$$a_3 = 4e^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad a_5 = -2e^{\frac{1}{2}}$$

e portanto a solução é

$$u(x, t) = 4\cos\left(\frac{7}{2}x\right)e^{-\frac{49}{4}t - \frac{e^{-2t}-1}{2}} - 2\cos\left(\frac{11}{2}x\right)e^{-\frac{121}{4}t - \frac{e^{-2t}-1}{2}}.$$

3. Considere o prolongamento periódico, de período 2π , da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

- (a) Determine a série de Fourier de f .
 (b) Use o resultado da alínea anterior e o teorema da convergência pontual de séries de Fourier num ponto conveniente, para determinar a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Resolução:

- (a) A série de Fourier da função 2π -periódica f , é dada por (note que neste caso $L = \pi$)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

com os coeficientes dados pelos integrais

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n > 0.$$

Para a função dada, temos apenas que calcular estes integrais:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} = 0 \quad n > 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) \quad n > 0. \end{aligned}$$

Os coeficientes b_n claramente anulam-se quando n é par, e portanto a série de Fourier de f é assim dada por

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

- (b) Se fizermos $x = \pi/2$, na série de Fourier obtida na alínea anterior, facilmente observamos que o argumento do seno serão apenas múltiplos ímpares de $\pi/2$,

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

A série de Fourier fica assim

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

que, aparte do factor $2/\pi$ e do $1/2$ é exactamente o que é pedido na pergunta.

Pelo teorema da convergência de séries de Fourier para funções seccionalmente C^1 , sabemos que em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ onde f seja contínua, a série converge para $f(x)$. A função f desta pergunta é, de facto, seccionalmente C^1 porque é constante em $]-\pi, 0[$ e em $[0, \pi]$, pelo que é infinitamente diferenciável no interior destes intervalos e tem limites (óbvios) finitos nos extremos. É também contínua no ponto $x = \pi/2$ onde vale $f(\pi/2) = 1$. Pelo que se tem

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0.$$

- (a) Determine uma solução estacionária (que não depende do tempo) $u_e(x)$, desta equação, satisfazendo as condições de fronteira $u_e(0) = 1$, $u_e(\pi/2) = 0$.
- (b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira (não estacionário), para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(0, t) = 1 & t > 0, & x = 0 \\ u(\pi/2, t) = 0 & t > 0, & x = \frac{\pi}{2} \\ u(x, 0) = 2\cos x & t = 0, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(**Sugestão:** Escreva a solução na forma $u = v + u_e$ e resolva o problema para v , utilizando a alínea anterior para estabelecer as novas condições inicial e de fronteira).

Resolução:

- (a) Uma solução estacionária verificará a equação diferencial ordinária

$$u_e''(x) + u_e = 0.$$

O polinómio característico associado é $R^2 + 1$, que tem como raízes $\pm i$, pelo que a solução geral é

$$u_e(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Pelas condições de fronteira, conclui-se que $A = 1$ e $B = 0$, e como tal

$$u_e(x) = \cos x.$$

(b) Como sugerido, considere-se

$$u(x, t) = u_e(x) + v(x, t)$$

onde $u_e(x) = \cos x$, determinada em (a). O que estamos a fazer, evidentemente, é a decompor a solução na soma de uma solução particular do problema com condições de fronteira não homogêneas, obtida na alínea anterior, com a solução $v(x, t)$ homogênea. Assim, $v(x, t)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 0 \\ v(0, t) = 0, \quad v(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) - u_e(x) = \cos x. \end{cases}$$

Houve que subtrair, à condição inicial geral, a componente da solução particular das condições de fronteira não homogêneas, ou seja, a solução estacionária $u_e(x)$.

Para determinar $v(x, t)$, correspondente a uma equação e a condições de fronteira homogêneas, usaremos agora o método da separação de variáveis, isto é, procura-se soluções não nulas da forma $v(x, t) = X(x)T(t)$. Derivando em ordem a t e a x , substituindo na equação e dividindo por XT , obtem-se

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t , e o segundo é uma função de x , a igualdade só se verificará se existir uma constante λ para a qual

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, pelas condições de fronteira $v(0, t) = v(\frac{\pi}{2}, t) = 0$, e atendendo a que $T(t)$ não pode ser a função identicamente nula, obtem-se $X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tem-se então que X é a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Para que X não seja identicamente nula, teremos que considerar $\lambda < 0$. Nesse caso

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

e para que as condições de fronteira sejam verificadas

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B \sin\left(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mais uma vez para que $X(x) \neq 0$, há que verificar-se $\lambda = -4n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$X_n(x) = B_n \sin(2nx)$$

e a solução da equação diferencial $\frac{T'(t)}{T(t)} = 1 - 4n^2$ é

$$T_n(t) = C_n e^{(1-4n^2)t}$$

Tem-se então, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \operatorname{sen}(2nx) e^{(1-4n^2)t}$$

é solução do problema de valores na fronteira. Construímos agora a solução geral por “sobreposição infinita” destas soluções,

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2nx) e^{(1-4n^2)t}.$$

Para determinar finalmente os coeficientes A_n teremos que utilizar a condição inicial

$$\cos x = v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2nx)$$

pelo que se conclui que as constantes A_n são precisamente os coeficientes do desenvolvimento em série de senos da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Visto que f é uma função contínua, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(2nx)$$

com

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{sen}(2nx) dx$$

Usando a igualdade $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b))$, tem-se que (também pode calcular o integral de b_n fazendo duas integrações por partes seguidas, ou ainda escrevendo o seno e cosseno com recurso a exponenciais complexas)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)x) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.$$

Como consequência

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \operatorname{sen}(2nx) e^{(1-4n^2)t}$$

e

$$u(x, t) = u_e(x) + v(x, t) = \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \operatorname{sen}(2nx) e^{(1-4n^2)t}.$$

5. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de senos de $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

e indique, justificando, a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Use o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Resolução:

- (a) Para obter um desenvolvimento de Fourier em série de senos, prolonga-se f ao intervalo $[-\pi, 0[$ de forma ímpar e obtém-se assim a sua série de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

em que $L = \pi$ e os coeficientes b_n são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{2}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi n} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \left[1 - \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right] \operatorname{sen}(nx).$$

Como o prolongamento ímpar de f , em $[-\pi, \pi]$, é seccionalmente C^1 , com descontinuidades em $x = 0$ e $x = \pm\pi/2$, o teorema da convergência pontual das séries de Fourier garante que a correspondente série de senos converge, em cada $x \in [-\pi, \pi]$, para

$$\begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x < -\pi/2 \\ -1/2 & \text{se } x = -\pi/2 \\ -1 & \text{se } -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < \pi/2 \\ 1/2 & \text{se } x = \pi/2 \\ 0 & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

Nos restantes pontos de $x \in \mathbb{R}$ a série converge para o prolongamento periódico, de período 2π , desta função.

- (b) Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogêneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrarias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$, para $0 \leq x \leq \pi$ e $t \geq 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T''(t)X(x) - 2T(t)X(x) = T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} - 2 = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possível se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis independentes x e t , forem ambas iguais a uma constante, digamos λ . Portanto é equivalente ao seguinte sistema de EDOs, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T''(t) = (\lambda + 2)T(t) \\ X''(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

Começamos pelo problema de valores e funções próprias da segunda derivada, correspondente à equação para X . A expressão para as suas soluções depende do sinal de λ . Temos $X''(x) = \lambda X(x) \Leftrightarrow X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Leftrightarrow (D^2 - \lambda)X(x) = 0$, donde

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos \sqrt{-\lambda}x + C\sin \sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogêneas $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

- (i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

- (ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ B\pi + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

- (iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + C\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as soluções não nulas $X(x) = C\sin(nx)$ com $n = 1, 2, \dots$, para $\lambda = -n^2$.

Para resolver a equação $T''(t) - (\lambda + 2)T(t) = 0 \Leftrightarrow T''(t) + (n^2 - 2)T(t) = 0 \Leftrightarrow (D^2 + (n^2 - 2))T(t) = 0$ há que observar que, para $n = 1$ a solução desta EDO de segunda ordem tem duas soluções exponenciais linearmente independentes, e para $n \geq 2$ as soluções são trigonométricas. Assim para $n = 1$, a equação é $T''(t) - T(t) = 0$ cuja solução geral é

$$T(t) = a_1 e^t + b_1 e^{-t},$$

enquanto para $n \geq 2$ a solução é

$$T(t) = a_n \cos(\sqrt{n^2 - 2} t) + b_n \sin(\sqrt{n^2 - 2} t).$$

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$a_1 e^t \sin(x) + b_1 e^{-t} \sin(x),$$

para $n = 1$, e

$$a_n \cos(\sqrt{n^2 - 2} t) \sin(nx) + b_n \sin(\sqrt{n^2 - 2} t) \sin(nx),$$

para $n \geq 2$.

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita" destas soluções obtidas acima:

$$u(x, t) = a_1 e^t \sin(x) + b_1 e^{-t} \sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(\sqrt{n^2 - 2} t) \sin(nx) + b_n \sin(\sqrt{n^2 - 2} t) \sin(nx).$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x, 0) = 0$ obtemos

$$(a_1 + b_1) \sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin(nx) = 0,$$

e como os coeficientes de Fourier da função nula são nulos, concluímos que

$$a_1 + b_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = -b_1,$$

e

$$a_n = 0, \quad \text{para } n \geq 2.$$

Por outro lado, derivando a série da solução em ordem a t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= a_1 e^t \sin(x) - b_1 e^{-t} \sin(x) + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} -\sqrt{n^2 - 2} a_n \sin(\sqrt{n^2 - 2} t) \sin(nx) + \sqrt{n^2 - 2} b_n \cos(\sqrt{n^2 - 2} t) \sin(nx), \end{aligned}$$

e substituindo na condição inicial para a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x)$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = (a_1 - b_1)\text{sen}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n^2 - 2} b_n \text{sen}(nx) = f(x),$$

donde, pelos coeficientes da série de Fourier de senos de f obtida na alínea anterior se conclui que

$$a_1 - b_1 = \frac{2}{\pi}$$

e

$$\sqrt{n^2 - 2} b_n = \frac{2}{\pi n} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

para $n \geq 2$, pelo que se conclui finalmente que

$$a_1 = \frac{1}{\pi}, \quad b_1 = -\frac{1}{\pi},$$

e

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi n \sqrt{n^2 - 2}} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right],$$

para $n \geq 2$, e portanto a solução é finalmente dada por

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \text{senh}(t) \text{sen}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi n \sqrt{n^2 - 2}} \left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \text{sen}(\sqrt{n^2 - 2} t) \text{sen}(nx).$$