Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 11 - 2 a 5 de Dezembro de 2025

1. Determine as exponenciais matriciais e^{At} para as seguintes matrizes

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução: Resolveremos estas alíneas de várias formas diferentes, para ilustrar as diferentes abordagens que podem ser seguidas para calcular a exponencial e^{At}, dependendo da matriz A.

a) Neste caso a matriz A é anti-simétrica pelo que sabemos, da álgebra linear, que os seus valores próprios são imaginários puros. Como são complexos, ocorrem em pares conjugados o que, para uma matrix 2×2, significa que serão necessariamente diferentes e por isso que a matriz é diagonalizável, com dois vetores próprios linearmente independentes. Com efeito, os valores próprios são

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i.$$

Para $\lambda = i$ os correspondentes vetores próprios são

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow iv_1 = v_2.$$

A forma geral destes vetores próprios é assim $\mathbf{v} = (\alpha, i\alpha)$ e, escolhendo por exemplo $\alpha = 1$, obtém-se $\mathbf{v} = (1, i)$. Conclui-se imediatamente que um vetor próprio para $\lambda = -i$ será o conjugado deste, portanto $\mathbf{v} = (1, -i)$. Assim, duas soluções complexas linearmente independentes do sistema original serão

$$e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Para obter agora soluções reais linearmente independentes basta separar a parte real e a parte imaginária de uma delas, por exemplo da primeira (as da segunda, por serem conjugadas, serão iguais, a menos da troca de sinal da parte imaginária).

$$e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t + i \operatorname{sen} t \\ i \cos t - \operatorname{sen} t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

donde se conclui que duas soluções reais são

$$\begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Agora, a matriz fundamental cujas colunas são formadas por esta base de soluções reais

$$X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix},$$

satisfaz $X(0) = I$, ou seja, esta base de soluções reais é tal que, em $t_0 = 0$, têm por condições iniciais os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^2$. Conclui-se assim, pela unicidade das soluções, que estas colunas são precisamente as colunas da matriz solução principal em $t_0 = 0$, ou seja, $X(t)$ é a matriz exponencial e^{At},

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

2. Os valores próprios desta matriz A são

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 3 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

São dois valores próprios distintos, pelo que para uma matriz 2×2 garantem dois vetores próprios linearmente independentes, ou seja, que A é diagonalizável e que poderemos assim obter duas soluções linearmente independentes da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$, com λ valor próprio e $\mathbf{v}$ um correspondente vetor próprio. Procedemos agora a calculá-las.

Os vetores próprios são, para $\lambda = 1$,

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2,$$

ou seja, $\mathbf{v} = (\alpha, \alpha) = \alpha(1, 1)$. Escolhemos por exemplo $\alpha = 1$, com $\mathbf{v} = (1, 1)$ e solução do sistema

$$e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Repetindo o mesmo procedimento para o valor próprio $\lambda = -1$ obtém-se a solução

$$e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 3\,e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Com estas duas soluções linearmente independentes como colunas, podemos construir agora uma matriz solução fundamental

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3\,e^{-t} \end{bmatrix}.$$

E sabemos, por fim, que, na posse duma matriz fundamental, poderemos sempre calcular a matriz principal em qualquer t_0 pela fórmula $Y_{t_0}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$. Mas a exponencial

e^{At} é precisamente a matriz principal em $t_0 = 0$, portanto

$$\begin{aligned} e^{At} = X(t)X^{-1}(0) &= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3\,e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3\,e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{3\,e^t - e^{-t}}{2} & \dfrac{1}{2}(e^{-t} - e^t) \\ \dfrac{3}{2}(e^t - e^{-t}) & \dfrac{3\,e^{-t} - e^t}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. A matriz 3×3 deste caso está organizada por blocos:

$$A = \begin{bmatrix} [5] & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

com um bloco 1×1, com apenas o valor escalar 5, e um bloco 2×2, correspondente à matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com efeito, isto corresponde a um sistema de EDOs em que a equação para a primeira incógnita, $x(t)$, está desacoplada das incógnitas $y(t), z(t)$, que correspondem ao bloco 2×2. A solução da equação linear homogénea desacoplada $x' = 5x$ é imediatamente dada por $x(t) = C_1 e^{5t}$. Isso reflete-se na exponencial matricial em que a exponencial, por blocos correspondentes, terá também um bloco 1×1 dado por $[e^{5t}]$. Resta-nos calcular a exponencial matricial e^{Bt} do bloco 2×2.

Começamos por determinar os valores próprios da matriz B. Eles são os zeros do polinómio característico, dados por $\det(B - \lambda I) = 0$, donde:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\lambda - 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Conclui-se portanto que B tem um único valor próprio, $\lambda = 2$, com multiplicidade algébrica 2 (como a matriz B, que é 2×2, não é diagonal, ao ter dois valores próprios repetidos podemos imediatamente concluir que não será diagonalizável e teremos necessariamente de recorrer à forma canónica de Jordan). Determinamos agora os vetores próprios associados a este valor próprio:

$$\begin{aligned} (B - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad (B - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde se obtêm duas equações dependentes e uma única relação $v_1 = 2v_2$, concluindo-se portanto que os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são todos os vetores (não nulos) da forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como o número de vetores próprios linearmente independentes desta família é apenas um, conclui-se, tal como previsto atrás, que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 2$ (a dimensão do seu espaço próprio) é um, sendo portanto inferior à sua multiplicidade algébrica. A matriz B não é por isso diagonalizável e a sua forma canónica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

obtida de B através da mudança de base $B = SJS^{-1}$. A matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 2 & w_1 \\ 1 & w_2 \end{bmatrix}$$

tem na primeira coluna um dos vetores próprios já determinados, associado ao único valor próprio, e na segunda coluna um vetor próprio generalizado $\mathbf{w}$ a ser obtido pela resolução do sistema

$$(B - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De novo se obtêm duas equações dependentes e uma única relação $w_1 = 2 + 2w_2$, donde se pode escolher $w_2 = 0$ e $w_1 = 2$ e então

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad S^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, sabemos que $e^{Bt} = Se^{Jt}S^{-1}$, com e^{Jt} dada por

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

pelo que

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -2te^{2t} \\ \frac{te^{2t}}{2} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Temos por fim, então, que a exponencial e^{At} é

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & (1+t)e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & \frac{te^{2t}}{2} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}; \quad \mathbf{y}(2) = (-1, 1, 1)$.

Resolução: A matriz dada corresponde ao sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_3 \\ y_2' = -3y_2 \\ y_3' = y_1 + 4y_3 \end{cases}$$

onde se observa imediatamente que a equação para a componente y_2 se encontra totalmente desacoplada das duas outras componentes, e pode ser resolvida imediatamente. Assim

$$y_2(t) = Ce^{-3t},$$

e de forma a satisfazer a condição inicial $y_2(2) = 1$ obtemos $C = e^6$, ou seja

$$y_2(t) = e^{-3(t-2)}.$$

Resta-nos um sistema 2×2 para as componentes y_1 e y_3, acopladas, correspondente à matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

para a qual começamos por determinar os valores próprios

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0,$$

de onde concluímos que $\lambda = 3$ com multiplicidade algébrica 2. Dado que a matriz não é diagonal, podemos até concluir desde já que a multiplicidade geométrica é 1 e que faltarão vetores próprios para construir uma base do espaço das soluções gerais do sistema homogéneo, para o qual será então genericamente preciso recorrer à forma canónica de Jordan.

Os vetores próprios são dados por

$$(B - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0,$$

ou seja, são da forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

confirmando que o espaço próprio tem dimensão 1, ou seja, que a multiplicidade geométrica é inferior à algébrica.

Poderíamos neste ponto fazer a observação, que simplificaria grandemente a resolução, de que procuramos uma solução (a única, pelo teorema de Picard-Lindelöf) de um problema de valor inicial específico, e que não queremos a solução geral do problema homogéneo. A condição inicial dada para y_1 e y_3 é $(-1, 1)$ ou seja, um vetor próprio (com $\alpha = -1$). E visto que sabemos que $e^{\lambda t}\mathbf{v}$ é solução do sistema, com λ e $\mathbf{v}$, respetivamente, valor e vetor próprio da matriz, podemos assim imediatamente concluir que

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = e^{3(t-2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é a solução que buscamos.

Caso não se observasse essa simplificação específica deste problema particular, poderíamos prosseguir com a resolução geral. Sabemos então que a matriz B é semelhante à forma canónica de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

com uma matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 1 & w_1 \\ -1 & w_2 \end{bmatrix},$$

em que escolhemos o vetor próprio $\mathbf{v} = (1, -1)$ como primeiro vetor da nova base, e $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ o vetor próprio generalizado, como segundo vetor da base, o qual determinamos pelo sistema

$$(B - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow w_1 + w_2 = -1.$$

Fazendo, por exemplo, $w_1 = -1$ e $w_2 = 0$ obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a exponencial da matriz B pode agora ser calculada por

$$e^{Bt} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-t)e^{3t} & -te^{3t} \\ te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

As componentes y_1 e y_3 do PVI dado podem finalmente ser obtidas pela fórmula $e^{B(t-t_0)}\mathbf{y_0}$ ou seja

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3-t)e^{3(t-2)} & -(t-2)e^{3(t-2)} \\ (t-2)e^{3(t-2)} & (-1+t)e^{3(t-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{3(t-2)} \\ e^{3(t-2)} \end{bmatrix}.$$

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Determine uma solução particular para o sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + (0, e^{2t})$.

Resolução:

(a) Começamos por determinar os valores e vetores próprios da matriz A. O seu polinómio característico $\det(A - \lambda I)$ tem raízes:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda = \pm i \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i.$$

Donde se conclui que os dois valores próprios são complexos, necessariamente conjugados.

Basta-nos agora calcular os vetores próprios associados a apenas um dos valores próprios, por exemplo $\lambda = 2+i$, porque sabemos que para $\lambda = 2-i$ os vetores próprios são também conjugados. Assim,

$$\det(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_2 = -iv_1.$$

Os vectores próprios associados a $\lambda = 2+i$ são, portanto, da forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Conclui-se imediatamente que para $\lambda = 2-i$ serão

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

A matriz A é assim diagonalizável, usando estes dois tipos de vetores próprios, linearmente independentes, como nova base. Assim,

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

com

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}.$$

Por fim, $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ e assim

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(2+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(2-i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t}}{2} & -\frac{e^{(2+i)t}-e^{(2-i)t}}{2i} \\ \frac{e^{(2+i)t}-e^{(2-i)t}}{2i} & \frac{e^{(2+i)t}+e^{(2-i)t}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}\operatorname{sen} t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Uma solução particular do sistema não homogéneo pode ser obtida pelo correspondente termo da fórmula da variação das constantes

$$e^{At}\int e^{-At}\mathbf{b}(t)dt,$$

o que, substituindo pela exponencial matricial calculada na alínea anterior, e pelo termo não homogéneo do sistema dado $\mathbf{b}(t) = (0, e^{2t})$ dá

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}\operatorname{sen} t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\operatorname{sen} t \\ -e^{-2t}\operatorname{sen} t & e^{-2t}\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} dt \\
= &\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}\operatorname{sen} t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix} dt \\
= &\begin{bmatrix} e^{2t}\cos t & -e^{2t}\operatorname{sen} t \\ e^{2t}\operatorname{sen} t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \\
= &\begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

6. Para $t \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Determine a solução geral da equação $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$.

   (b) Indique uma matriz solução fundamental para a equação.

   (c) **Utilizando a matriz da alínea anterior** resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolução: Esta matriz $A(t)$ depende de t o que, à partida, pareceria indicar que as técnicas habituais de resolução de sistemas de EDOs (valores e vetores próprios, ou exponencial matricial) seriam infrutíferos e portanto o sistema não resolúvel de forma explícita, a não ser a afirmação genérica de existência e unicidade de soluções por Picard-Llindelöf. Mas uma observação mais atenta da matriz revela que ela é triangular superior, e parcialmente desacoplada, com um acoplamento simples apenas entre a segunda e terceira equações, em que a equação de $y(t)$ depende de $z(t)$, mas não o contrário: tal como a equação para $x(t)$, a equação para $z(t)$ é uma equação escalar isolada.

(a) Para obter a solução geral do sistema homogéneo basta resolver o sistema linha a linha. Como as equações para $x(t)$ e $z(t)$ são escalares isoladas, começamos por estas:

$$x' = -x \Rightarrow x(t) = C_1 e^{-t},$$

e

$$z' = 2z \Rightarrow z(t) = C_3 e^{2t}.$$

Para $y(t)$, na posse já da solução $z(t)$, resta-nos resolver a equação linear não homogénea

$$y' = 2y + 2tC_3e^{2t},$$

a qual, usando o método estudado nas equações escalares, com recurso a fator integrante, leva a

$$\begin{aligned} y' = 2y + C_3 2te^{2t} &\Rightarrow y' - 2y = C_3 2te^{2t} \\ &\Rightarrow e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y = e^{-2t}(C_3 2te^{2t}) \Rightarrow (e^{-2t}y)' = C_3 2t \\ &\Rightarrow e^{-2t}y = C_3t^2 + C_2 \Rightarrow y(t) = C_2e^{2t} + C_3t^2e^{2t}. \end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que a solução geral é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{2t} + C_3t^2e^{2t} \\ C_3e^{2t} \end{bmatrix},$$

com $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Pela resposta à alínea anterior concluímos que 3 soluções linearmente independentes do sistema são

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ t^2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix},$$

correspondendo, respetivamente, aos casos $(C_1, C_2, C_3) = (1, 0, 0)$, $(C_1, C_2, C_3) = (0, 1, 0)$ e $(C_1, C_2, C_3) = (0, 0, 1)$. Portanto, uma matriz solução fundamental pode ser, simplesmente, construida com estas três soluções nas suas colunas:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

(c) Vamos recorrer à fórmula da variação das constantes, com recurso à matriz fundamental da alínea anterior

$$\mathbf{x}(t) = X(t)X^{-1}(0)\mathbf{x}_0 + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds.$$

A parte homogénea desta solução dá então

$$X(t)X^{-1}(0)\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ t^2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

A parte particular não homogénea dá

$$\begin{aligned}
X(t)\int_0^t X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2s} & s^2e^{2s} \\ 0 & 0 & e^{2s} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{s} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2s} & -s^2e^{-2s} \\ 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{s} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t}-1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1-e^{-t} \\ te^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, somando estas duas componentes da solução, obtemos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ (t+t^2)e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$