Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 10 - 24 a 28 de Novembro de 2025

1. Determine a solução geral de
$$\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -2x + 4y. \end{cases}$$

Resolução: Trata-se de um sistema de EDOs linear homogéneo, de dimensão 2, com matriz associada
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$
pelo que precisamos encontrar duas soluções linearmente independentes, que constituem uma base do espaço vetorial de soluções.

Procuraremos soluções linearmente independentes da forma $(x(t), y(t)) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, em que λ e $\mathbf{v}$ são, respetivamente, valor e vetor próprios associados à matriz $\mathbf{A}$.

O polinómio característico da matriz $\mathbf{A}$ é $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ pelo que os valores próprios são
$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 1.$$

Os vetores próprios associados a estes valores próprios são, para $\lambda = 2$
$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2,$$
ou seja, por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 1)$. E para $\lambda = 1$
$$(\mathbf{A} - 1\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2v_1 = 3v_2,$$
ou seja, por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 2/3)$.

Assim, uma base do espaço das soluções poderão ser, por exemplo, as duas soluções
$$e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$
pelo que a solução geral do sistema será o espaço gerado por estas duas soluções, ou seja, todas as suas combinações arbitrárias
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{t} \\ c_1 e^{2t} + c_2 \frac{2}{3} e^{t} \end{bmatrix},$$
com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários.

2. Determine a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Este sistema de 3 equações a 3 incógnitas está, na verdade, parcialmente desacoplado. A equação da primeira componente é simplesmente $x' = -3x$, cuja solução é $x(t) = c_1 e^{-3t}$, para $c_1 \in \mathbb{R}$ arbitrário. Outra maneira de o deduzir é perceber que a primeira coluna está já diagonalizada, ou seja, que na forma em que a matriz $\mathbf{A}$ se encontra dada, -3 é valor próprio associado ao vetor próprio do primeiro vetor da base canónica, ou seja, de $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$. Portanto, uma solução vetorial é $e^{-3t}(1, 0, 0) = (e^{-3t}, 0, 0)$ que é o mesmo que a solução só para $x(t)$ que vimos antes.

Duas restantes soluções vetoriais linearmente independentes serão necessariamente obtidas da matriz 2×2, correspondente ao acoplamento entre as soluções $y(t)$ e $z(t)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$$

cujos valores próprios são dados pela equação característica

$$(-1 - \lambda)(3 - \lambda) + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2i,$$

que tem soluções complexas (necessariamente conjugadas). Neste caso basta encontrar um dos vetores próprios, porque o outro é necessariamente conjugado (em consequência da matriz ter componentes reais). Portanto para $\lambda = 1 + 2i$, por exemplo, tem-se a equação para os vetores próprios

$$\begin{bmatrix} -2 - 2i & 2 \\ -4 & 2 - 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (1 + i)v_1 = v_2.$$

A forma geral destes vetores próprios é assim $\mathbf{v} = (\alpha, (1 + i)\alpha)$ e, escolhendo por exemplo $\alpha = 1$, obtém-se $\mathbf{v} = (1, 1 + i)$. Conclui-se imediatamente que um vetor próprio para $\lambda = 1 - 2i$ será portanto $\mathbf{v} = (1, 1 - i)$. Assim, duas soluções complexas linearmente independentes do sistema original serão

$$e^{(1+2i)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 + i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e^{(1-2i)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 - i \end{bmatrix}.$$

Mas, como sempre, pretendemos soluções reais: são as que são garantidas pelo teorema de Picard-Lindelöf. Para isso sabemos que podemos obter duas soluções reais linearmente independentes, separando a parte real e a parte imaginária de uma destas soluções complexas (as da outra solução complexa serão exatamente as mesmas, apenas com uma mudança de sinal da parte imaginária, que é irrelevante para a combinação linear final). Assim, relembrando a fórmula de Euler, que $e^{(1+2i)t} = e^t \cos(2t) + i e^t \operatorname{sen}(2t)$, tem-se

$$e^{(1+2i)t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cos(2t) + i e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t(\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)) + i e^t(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix},$$

pelo que, separando as partes reais e imaginárias, se obtêm duas soluções linearmente independentes reais

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cos(2t) \\ e^t(\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix},$$

concluindo-se, portanto, que a solução geral do sistema inicial é

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} &= c_1 \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \cos(2t) \\ e^t(\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \operatorname{sen}(2t) \\ e^t(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_1 e^{-3t} \\ c_2 e^t \cos(2t) + c_3 e^t \operatorname{sen}(2t) \\ c_2 e^t(\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)) + c_3 e^t(\cos(2t) + \operatorname{sen}(2t)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ arbitrários.

3. Determine a solução do problema de valor inicial para o sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y \\ z' = t^2 x + z \end{cases} \qquad x(0) = 3,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1.$$

Resolução: Trata-se de um problema de valor inicial para um sistema linear homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas associado à matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ t^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aparentemente seria um problema de resolução explícita impossível, porque só sabemos como lidar com sistemas lineares com matrizes de coeficientes constantes. No entanto, rapidamente se percebe que as equações para $x(t)$ e $y(t)$ acopladas entre si estão, no entanto, desacopladas de $z(t)$ podendo, por isso, ser resolvidas separadamente. E estas são de coeficientes constantes. Depois de obtidas as soluções do problema de valor inicial para $x(t)$ e $y(t)$, a solução de $x(t)$ pode ser introduzida na equação de $z(t)$ e esta última resolvida isoladamente como uma simples equação escalar linear não homogénea.

Portanto, começamos por obter a solução do sistema 2×2 associado à matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

para o qual precisamos de duas soluções linearmente independentes, como base do espaço das soluções. A sua equação característica é

$$(2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Estes dois valores próprios distintos implicam a existência de correspondentes vetores próprios linearmente independentes. Assim, para $\lambda = 1$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = 3v_2,$$

ou seja, por exemplo, $\mathbf{v} = (3, 1)$. E para $\lambda = -1$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2,$$

escolhendo, por exemplo, $\mathbf{v} = (1, 1)$.

A solução geral do sistema para $x(t)$ e $y(t)$ é assim

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ c_1 e^t + c_2 e^{-t} \end{bmatrix},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários. A solução, única (por Picard-Lindelöf), que satisfaz o problema de valor inicial $x(0) = 3$, $y(0) = 1$ é

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

cuja solução é, evidentemente, $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$. Portanto

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Finalmente, podemos então resolver a equação (linear não homogénea escalar) para $z(t)$,

$$\frac{dz}{dt} = t^2 x(t) + z(t) \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = z + 3t^2 e^t.$$

Como habitualmente, passamos $z(t)$ para o lado esquerdo da equação, e multiplicamos por um factor integrante $\mu(t) \neq 0$ que transforme o lado esquerdo numa derivada dum produto

$$\frac{dz}{dt} = z + 3t^2 e^t \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} - z = 3t^2 e^t \Leftrightarrow \mu(t)\frac{dz}{dt} - \mu(t) z = 3t^2 e^t \mu(t),$$

de modo que

$$\mu(t)\frac{dz}{dt} - \mu(t) z = \mu(t)\frac{dz}{dt} + \frac{d\mu}{dt} z = \frac{d(\mu(t)z(t))}{dt},$$

pelo que terá de ser

$$\frac{d\mu}{dt} = -\mu(t),$$

ou seja $\mu(t) = e^{-t}$, por exemplo. A equação diferencial ordinária para $z(t)$ com este factor integrante ficará, então

$$\frac{d(e^{-t} z(t))}{dt} = 3t^2,$$

e integrando desde t_0 até t e usando a condição inicial $z(0) = 1$, obtém-se

$$e^{-t}z(t) - z(0) = t^3 \Leftrightarrow z(t) = (t^3 + 1)e^t.$$

Conclui-se portanto que a solução única do problema de valor inicial pedido é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t \\ e^t \\ (t^3 + 1)e^t \end{bmatrix}.$$

4. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y + 4t \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + 4t \end{cases}$$

(a) Determine uma solução particular da forma $(x(t), y(t)) = (\alpha t + \beta, \gamma)$, para constantes apropriadas $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(b) Obtenha a solução geral do sistema, e extraia dela a solução do problema de valor inicial $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

Resolução:

(a) Substituindo no sistema o candidato a solução obtemos

$$\begin{cases} \alpha = \alpha t + \beta + 3\gamma + 4t \\ \\ 0 = \alpha t + \beta - \gamma + 4t \end{cases}$$

donde se conclui que $\alpha = -4$, porque os únicos termos em t têm que se cancelar. E a partir daí o sistema reduz-se a

$$\begin{cases} -4 = \beta + 3\gamma \\ \\ 0 = \beta - \gamma \end{cases}$$

e daqui $\beta = \gamma = -1$. Portanto, uma solução particular, como sugerido, será $(x(t), y(t)) = (-4t - 1, -1)$.

(b) Sabemos que a solução geral dum problema linear não homogéneo, como o que é dado, é igual a uma solução particular do sistema não homogéneo, somada a todas as soluções do sistema homogéneo, as quais formam um espaço vetorial de dimensão dois. Uma solução particular não homogénea já foi determinada na alínea anterior, pelo que resta obter as soluções homogéneas, ou seja, do sistema

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$$

associado à matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como sempre, procuramos duas soluções linearmente independentes que formem uma base do espaço das soluções homogéneas, da forma $e^{\lambda t}\mathbf{v}$, em que λ e $\mathbf{v}$ são, respetivamente, valor e vetor próprios associados à matriz $\mathbf{A}$. A sua equação característica é

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Estes dois valores próprios distintos implicam a existência de correspondentes vetores próprios linearmente independentes. Assim, para $\lambda = 2$ obtém-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = 3v_2,$$

ou seja, por exemplo, $\mathbf{v} = (3, 1)$. E para $\lambda = -2$,

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = -v_2,$$

escolhendo, por exemplo, $\mathbf{v} = (1, -1)$.

A solução geral do sistema homogéneo é assim

$$c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} \end{bmatrix},$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários.

A solução geral do sistema não homogéneo é agora igual a esta solução geral homogénea somada a uma solução particular não homogénea, por exemplo a que foi encontrada na alínea anterior. Assim

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4t - 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - 4t - 1 \\ c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} - 1 \end{bmatrix}.$$

Resta-nos determinar c_1, c_2 de forma a que a condição inicial seja satisfeita. E, para isso

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c_1 + c_2 - 1 \\ c_1 - c_2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que implica os coeficientes únicos $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. Tem-se finalmente assim a solução do problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - e^{-2t} - 4t - 1 \\ e^{2t} + e^{-2t} - 1 \end{bmatrix}.$$