Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 1 - 4 a 10 de Setembro de 2025

1. Determine se os pontos $P(7, 10, 4)$ e $Q(5, 22, 5)$ pertencem à superfície $r(u, v) = (2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v)$.

Resolução: Para mostrar se um ponto P_0 pertence à superfície há que determinar (se existir) um par (u_0, v_0) para o qual $P_0 = r(u_0, v_0)$. Assim para verificar se o ponto $P(7, 10, 4)$ pertence à superfície há que resolver

$$r(u,v) = (7,10,4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2u + 3v = 7 \\ 1 + 5u - v = 10 \\ 2 + u + v = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \\ 5 = 4 \end{cases}$$

que é claramente um sistema impossível. Conclui-se que o ponto P **não** pertence à superfície.

Analogamente, para verificar se o ponto Q pertence à superfície, há que resolver o sistema

$$r(u,v) = (5,22,5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 1 + 5u - v = 22 \\ 2 + u + v = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = 4 \\ v = -1 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Tem-se então que $r(4, -1) = (5, 22, 5)$; conclui-se que o ponto Q pertence à superfície.

2. Determine uma representação paramétrica para as superfícies definidas como se segue.

   (a) A superfície definida por $x + 2y + 3z = 4$, x, y e $z \in \mathbb{R}$.

   (b) A superfície S caracterizada por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z > 0$.

   (c) A superfície $z = 4 - y^2$ cortada pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$.

Resolução:
(a) Trata-se do plano de equação $x + 2y + 3z = 4$. Dado que $x = 4 - 2y - 3z$ (ou seja, os pontos da superfície são o gráfico de uma função $x = g(y, z)$) tomamos y e z como parâmetros e consideramos

$$\begin{cases} x = 4 - 2u - 3v \\ y = u \\ z = v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

como uma parametrização da superfície S. Também podemos considerar como parametrizações de S as funções vectoriais

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{4-u-3v}{2} \\ z = v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e z como parâmetros, e

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{4-u-2v}{3} \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e y como parâmetros.

Outra parametrização surge naturalmente da equação vectorial de um plano. Atendendo aos vectores directores do plano, os quais podem ser facilmente obtidos a partir de três pontos do plano que não sejam colineares, é possível obter a equação vectorial do plano. De facto, consideremos os seguintes pontos do plano $x + 2y + 3z = 4$

$$A(-1,1,1) \quad , \quad B(3,-1,1) \quad \text{e} \quad C(-4,1,2)$$

a que correspondem os vectores directores do plano

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,-2,0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-3,0,1)$$

O plano $x + 2y + 3z = 4$ tem então por equação vectorial

$$(x,y,z) = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x,y,z) = (-1,1,1) + t(4,-2,0) + s(-3,0,1) \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Daqui resultam as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 4t - 3s \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + s \end{cases} \qquad (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Trata-se do hemisfério norte (a "metade superior") da superfície esférica de centro na origem, $(0,0,0)$, e raio 4.

Pode-se obter uma parametrização resolvendo a equação da esfera em ordem a z:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Como $z > 0$ (hemisfério norte), a solução que nos interessa é a que corresponde ao sinal positivo. A projecção da esfera no plano xy é o disco

$$B = \Big\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\Big\},$$

pelo que a parametrização é

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

para $(x, y) \in B$, ou seja

$$g(x, y) = \left(x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2}\right), \qquad (x, y) \in B.$$

(c) A superfície obtém-se por translação da parábola $z = 4 - y^2$ segundo a direcção do eixo dos x (faça uma figura). É então conveniente usar x como um dos parâmetros. Dado que $z = 1 - y^2$, tomamos também y como parâmetro. Assim sendo,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - v^2 \end{cases}$$

onde $0 < x < 2$ implica que $0 < u < 2$. Por outro lado, sendo S cortada pelo plano $z = 0$ então $z > 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - y^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; -2 < v < 2$. Obteve-se assim a parametrização

$$r(u, v) = \left(u, v, 4 - v^2\right) \quad , \quad 0 < u < 2 \;\; , \;\; -2 < v < 2.$$

3. Identifique a superfície parametrizada por:
   (a) $r(u, v) = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, v)$, $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < h$, onde $h > 0$ é um real dado.
   (b) $r(u, v) = (1, u, v)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 1$.
   (c) $r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ com $(u, v) \in D = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u^2 + v^2 < 1\right\}$.

Resolução:
(a) Como se vê, a superfície está parametrizada à custa de coordenadas cilíndricas. Tomando isso em consideração, pode-se eliminar os parâmetros u e v como se segue:

$$x^2 + y^2 = v^2 \;\text{ e }\; z = v \quad \Leftrightarrow \quad z^2 = x^2 + y^2$$

A superfície é pois uma parte do cone com vértice no origem, geratriz $z = x$ e eixo de simetria coincidente com o eixo dos z. Olhando agora para o domínio dos parâmetros observa-se que $z = v$ é positivo e menor que h; assim, a superfície é a face lateral do cone dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $0 < z < h$.

(b) Trata de uma porção de um plano, dado que a parametrização é uma transformação linear. Ora $y = u$ e $z = v$ significam que y e z podem tomar quaisquer valores nos intervalos indicados. Assim, a equação cartesiana da superfície é

$$x = 1$$

com $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$.

(c) Conforme se constata por eliminação dos parâmetros $u = x$ e $v = y$, a função $r(u, v)$ parametriza o parabolóide de equação

$$z = x^2 + y^2, \quad \text{com} \quad x^2 + y^2 < 1$$

equivalente a

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{com} \quad 0 \leq z < 1.$$

Note que $z = u^2 + v^2 < 1$ é consequência de $u^2 + v^2 < 1$. O domínio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ corresponde à projecção da superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$ e $0 \leq z < 1$ no plano xy.

4. Determine a expressão geral do vector normal e do vector normal unitário à superfície S definida por:

   (a) $x + 2y + 3z = 4$, com orientação para cima.

   (b) $z = 9 - x^2 - y^2$, com orientação para baixo.

Resolução:

(a) Dada a parametrização $r(u, v) = (4 - 2u - 3v, u, v)$, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, apresentada no Exercício 2(a), temos

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-2, 1, 0) \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial v} = (-3, 0, 1)$$

Como tal, a expressão geral do vector normal a S é

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 3)$$

Dado que a superfície S é orientada para cima, consideramos este vector e não o seu simétrico $-\overrightarrow{N}$. A expressão geral do vector normal unitário a S é

$$\nu = \frac{\overrightarrow{N}}{||\overrightarrow{N}||} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$$

De outra forma (bastante mais simpes, por sinal), dado que a superfície é da forma

$$F(x, y, z) = 4$$

com $F(x, y, z) = x + 2y + 3z$, trata-se de uma curva de nível de F e assim um vector normal pode ser dado por

$$\overrightarrow{N} = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (1, 2, 3)$$

(b) Trata-se do parabolóide de equação $z = 9 - x^2 - y^2$. Uma parametrização de S é

$$r(u,v) = \big(u, v, 9 - u^2 - v^2\big) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, a expressão geral do vector normal é

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que se pretende a superfície S orientada para baixo, há que considerar o vector simétrico $-\overrightarrow{N} = (-2u, -2v, -1)$ que "aponta para baixo". A expressão geral do vector normal unitário é

$$\nu = \frac{\overrightarrow{N}}{||\overrightarrow{N}||} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}(-2u, -2v, -1)$$

Mais uma vez, a superfície é da forma

$$F(x,y,z) = 9$$

com $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$, trata-se de uma curva de nível de F e assim um vector normal é dado por

$$\overrightarrow{N} = \nabla F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 1)$$

5. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $g(u,v)$ no ponto especificado.

   (a) $g(u,v) = (u^2, 2u\operatorname{sen} v, u\cos v)$, $(u_0, v_0) = (1, 0)$.

   (b) $g(u,v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$, no ponto $g(1,1)$.

Resolução:

(a) Temos que

$$g(u,v) = \big(u^2, 2u\operatorname{sen} v, u\cos v\big)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(u,v) = u^2 \\ y(u,v) = 2u\operatorname{sen} v \\ z(u,v) = u\cos v \end{cases}$$

Primeiro, vamos calcular os vectores tangentes:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (2u, 2\operatorname{sen} v, \cos v)$$

e

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 2u\cos v, -u\,\mathrm{sen}\, v)$$

Assim, o vector normal ao plano tangente é:

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2u & 2\mathrm{sen}\, v & \cos v \\ 0 & 2u\cos v & -u\,\mathrm{sen}\, v \end{vmatrix} = \left(-2u\mathrm{sen}^2 v - 2u\cos^2 v, 2u2\mathrm{sen}\, v, 4u^2\cos v\right)$$

e no ponto dado $u_0 = 1$ e $v_0 = 0$ temos que o vector normal é $(-2, 0, 4)$. Portanto, uma equação do plano tangente no ponto $g(1, 0) = (1, 0, 1)$ é

$$-2\cdot(x-1) + 0\cdot(y-0) + 4\cdot(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2z + 1 = 0$$

Doutra forma, eliminando os parâmetros, temos que a superfície é dada por

$$x = \frac{y^2}{4} + z^2$$

ou seja, a superfície é da forma

$$F(x, y, z) = 0$$

com $F(x, y, z) = x - \frac{y^2}{4} - z^2$, trata-se de uma curva de nível de F e assim o vector normal é dado por

$$\overrightarrow{N}(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = \left(1, -\frac{y}{2}, -2z\right)$$

Assim uma equação do plano tangente a S no ponto $g(1, 0) = (1, 0, 1)$ é dada por

$$\overrightarrow{N}(1, 0, 1)\cdot(x-1, y, z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1, 0, -2)\cdot(x-1, y, z-1) = 0$$

obtendo-se assim (o mesmo resultado)

$$(x-1) - 2(z-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2z + 1 = 0.$$

(b) Temos que

$$g(u, v) = \left(u - v, u^2 + v^2, uv\right)$$

pelo que

$$\begin{cases} x(u, v) = u - v \\ y(u, v) = u^2 + v^2 \\ z(u, v) = uv \end{cases}$$

Primeiro, vamos calcular os vectores tangentes:

$$g_u = \frac{\partial g}{\partial u} = (1, 2u, v)$$

e

$$g_v = \frac{\partial g}{\partial v} = (-1, 2v, u)$$

Assim, um vector normal ao plano tangente é:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2u & v \\ -1 & 2v & u \end{vmatrix} = \left(2u^2 - 2v^2, -u - v, 2u + 2v\right)$$

e no ponto dado $(u, v) = (1, 1)$ temos que um vector normal é $(0, -2, 4)$. Portanto, uma equação do plano tangente ao ponto $r(1, 1) = (0, 2, 1)$ é

$$0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 2) + 4 \cdot (z - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y - 2z = 0$$

Note que, neste caso, é difícil obter a representação como conjunto de nível 0, pois dá algum trabalho eliminar os parâmetros em $g(u, v)$; portanto, é aconselhável esta forma de fazer o exercício.