Análise Matemática I

1º Teste - 10 de Novembro de 2001

Civ. e Ter.

Resolução

1. Se p é verdadeira, então $\sim p$ é falsa e $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ é verdadeira. Se p é falsa, então $p \Rightarrow q$ é verdadeira e $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ é verdadeira. Portanto, a proposição $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ é verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos de p e q.

2. Sabemos pela propriedade da tricotomia que $\frac{1}{x} = 0$, $\frac{1}{x} < 0$ ou $\frac{1}{x} > 0$, apenas se verificando uma destas três possibilidades. Como zero é elemento absorvente da multiplicação, se $\frac{1}{x} = 0$, então $0 = x \times \frac{1}{x} = 1$; mas $0 \neq 1$, logo $\frac{1}{x} \neq 0$. Analisemos agora a segunda possibilidade. Sabemos que $x > y$ e $z < 0$, implica $xz < yz$. Tomando $y = 0$ e $z = \frac{1}{x} < 0$, vem $1 = x \times \frac{1}{x} < 0 \times \frac{1}{x} = 0$; mas $1 \not< 0$, logo $\frac{1}{x} \not< 0$. Concluímos que $\frac{1}{x} > 0$.

3.

a) (z_n) é o produto de um infinitésimo $\left(\frac{1}{n}\right)$ por uma sucessão limitada $(|\sin n| < 1)$, pelo que é um infinitésimo.

b) $\lim u_n = \frac{(1+\lim \frac{1}{n})^2}{1-\lim \frac{1}{n}} = 1$.

c) $\lim v_n = \frac{\lim u_n}{\lim(n-2)} = 0$.

d) $0 < w_n \leq v_n$, para todo o n natural maior do que 2. Pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim w_n = 0$.

4.

a) A proposição $(0 \leq u_1 < 1) \wedge (0 \leq u_2 < \frac{1}{2})$ é verdadeira porque $u_2 = u_1 = 0$. Suponhamos que $(0 \leq u_{2n+1} < 1) \wedge (0 \leq u_{2n+2} < \frac{1}{2})$. Então $(0 \leq u_{2n+3} = \frac{1}{2} + u_{2n+2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1) \wedge (0 \leq u_{2n+4} = \frac{u_{2n+3}}{2} < \frac{1}{2})$.

b) O Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que u tem subsucessões convergentes.

c)

$$\begin{array}{ll}
u_1 = 0, & u_2 = 0, \\
u_3 = \frac{1}{2}, & u_4 = \frac{1}{4}, \\
u_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, & u_6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \\
u_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, & u_8 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \\
\dots & \dots \\
u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}, & u_{2n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k}, \\
\dots & \dots
\end{array}$$

De facto, para $n = 0$, $u_1 = \sum_{k=1}^{0} \frac{1}{2^k} = 0$ e $u_2 = \sum_{k=2}^{1} \frac{1}{2^k} = 0$. Por outro lado, seja $n \in \mathbb{N}$. Se $u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ e $u_{2n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k}$, então

$$u_{2n+3} = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \text{ e } u_{2n+4} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^{k+1}} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{2^k}.$$

Provámos que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad u_{2n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

d) $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1 - \lim \frac{1}{2^n} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2} = \frac{1}{2} - \lim \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Provemos que a sucessão não tem outros sublimites para além de $\frac{1}{2}$ e 1. Seja (u_{n_k}) uma subucessão convergente de (u_n) e designemos por a o seu limite. Então há infinitos números n_k que são pares ou há infinitos números n_k que são ímpares. No primeiro caso $a = \frac{1}{2}$, pois (u_{n_k}) tem uma subsucessão cujo limite coincide necessariamente com $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+2}$. No segundo caso $a = 1$.

e) A sucessão não é de Cauchy porque não converge, pois tem duas subsucessões com limites diferentes.

5. Se $u_n \to a$, então qualquer subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) tem uma subsucessão convergente para a, nomeadamente a própria sucessão (u_{n_k}).

Para provarmos a implicação recíproca, e uma vez que

$$(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q),$$

provemos que se (u_n) não converge para a, então (u_n) tem uma subsucessão sem nenhuma subsucessão convergente para a.

Suponhamos então que (u_n) não converge para a. Existe um $\epsilon > 0$ tal que para qualquer ordem $p \in \mathbb{N}$ existe $n > p$ com $|u_n - a| \geq \epsilon$. Logo (u_n) tem uma subsucessão, digamos (u_{n_k}), tal que $|u_{n_k} - a| \geq \epsilon$ para todo o $k \in \mathbb{N}_1$. Obviamente, a subsucessão (u_{n_k}) não tem nenhuma subsucessão convergente para a.