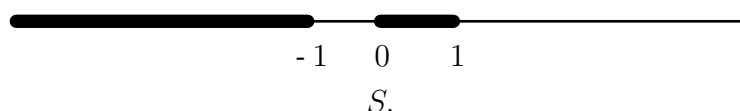


Análise Matemática I
2º Exame - 5 de Fevereiro de 99
Ele., Eng. Bio., Eng. Quím., Ges. e Quím.

Soluções

1.

- a) Se $x > 0$, então $x^2 \leq 1$, ou seja, $x \in]0, 1]$.
Se $x < 0$, então $x^2 \geq 1$, ou seja, $x \in]-\infty, -1]$.
Portanto, $S =]-\infty, -1] \cup]0, 1]$.



- b) $\max S = \sup S = 1$; $\inf S$ e $\min S$ não existem.
- c)
 - $x_n = -2 + \frac{1}{n}$;
 - $x_n = \frac{1}{n}$;
 - $x_n = -n$;
 - $x_n = 1$;
 - $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_n = \frac{1}{n}$ se $n \geq 2$. A sucessão (x_n) é de Cauchy porque converge.

2.

- a) $x_1 = 0 \leq 1$.
Suponhamos que $x_n \leq 1$. Então $x_{n+1} = \frac{x_n+2}{3} \leq \frac{1+2}{3} = 1$.
- b) $x_n - x_{n-1} = \frac{x_{n-1}+2}{3} - x_{n-1} = \frac{2(1-x_{n-1})}{3} \geq 0$. Logo, (x_n) é crescente.
- c) A sucessão (x_n) é crescente e majorada.
- d) Seja $x = \lim x_n$. Aplicando limites a ambos os membros de $x_n = \frac{x_{n-1}+2}{3}$, obtém-se $x = \frac{x+2}{3}$. Resolvendo em ordem a x , vem $x = 1$.

3.

- a) $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. Logo, a série dada é convergente.
- b) $\lim \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. A série é divergente pois o limite do seu termo geral não é zero.
- c) A série harmónica alternada é simplesmente convergente.
- d) Seja $a_n = \frac{n^n}{\pi^n n!}$. $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{\pi} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{\pi} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{\pi} < 1$. Pelo critério d'Alembert, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$ é convergente.

4.

- a) A função φ é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a composição de funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = f'(\arctan x^2) \cdot \frac{2x}{1+x^4}.$$

φ tem um mínimo absoluto em 0, pois $\varphi'(x) < 0$ se $x < 0$ e $\varphi'(x) > 0$ se $x > 0$.

b)

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= f''(\arctan x^2) \cdot \frac{4x^2}{(1+x^4)^2} + f'(\arctan x^2) \cdot \frac{2+2x^4-2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} \\ &= f''(\arctan x^2) \cdot \frac{4x^2}{(1+x^4)^2} + f'(\arctan x^2) \cdot \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}.\end{aligned}$$

$$\varphi'(1) = f'(\frac{\pi}{4}) \text{ e } \varphi''(1) = f''(\frac{\pi}{4}) - f'(\frac{\pi}{4}), \text{ logo } \varphi''(1) + \varphi'(1) = f''(\frac{\pi}{4}).$$

5.

- a) Como f é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$, aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[0, 1]$ obtém-se que $\exists_{c \in]0, 1[} f'(c) = 1$.

- b) Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\forall_{\epsilon > 0} \exists_M x \geq M \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$.

Fixe-se $\epsilon < 1$. Seja M o valor correspondente a este ϵ , de acordo com a proposição da última linha. Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[1, M]$, conclui-se que $\exists_{d \in]1, M[} f'(d) = \frac{f(M)-f(1)}{M-1} < \frac{\epsilon-1}{M-1} < 0$.

Como f' é contínua, pelo Teorema do Valor Intermédio, $f'([0, +\infty[) \supset [f'(d), f'(c)] \supset [0, 1]$.

- c) Seja (ϵ_n) uma sucessão de termos positivos, convergente para zero. Para cada ϵ_n , existe um M_n , tal que $x \geq M_n \Rightarrow |f(x)| < \frac{\epsilon_n}{2}$. Podemos supor que $M_n > n$. Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[M_n, M_n + 1]$, conclui-se que existe $c_n \in]M_n, M_n + 1[$, tal que $f'(c_n) = \frac{f(M_n+1)-f(M_n)}{M_n+1-M_n} = f(M_n+1) - f(M_n)$. Logo $|f'(c_n)| \leq |f(M_n+1)| + |f(M_n)| < \epsilon_n$. Portanto, $c_n \rightarrow +\infty$ e $f'(c_n) \rightarrow 0$.