Análise Matemática I

2º Exame - 31 de Janeiro de 2002

LEC, LEIC e LET

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule

a) $\lim_{n\to\infty} \arctan n$. (1)

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+4)^2(3n+5)^3}{(n+6)^7}$. (1)

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$. (1)

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\pi x)}{x}$. (1)

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$. (1)

f) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}$. (1)

g) $\frac{d}{dx}e^{\sin x}$. (1)

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$. (1)

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n\pi}}{n!}$. (1)

2. Determine o raio de convergência das séries de potências e o seu comportamento nos extremos do intervalo de convergência. Determine a soma da primeira série.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$. (1)

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$. (1)

3. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-x^4}\sin(\sin(\sin x))$.

a) Mostre que f é limitada e dê um majorante e um minorante para f. (1)

b) Qualquer sucessão (x_n) de termos reais tem uma subsucessão (x_{n_k}) tal que $(f(x_{n_k}))$ converge. Justifique. (1)

c) A função f tem supremo e ínfimo reais. Justifique. (0.5)

d) Determine $\lim_{|x|\to\infty} f(x)$. (1)

e) Determine se f é par, ímpar ou nem par nem ímpar. (0.5)

f) A função f tem máximo e mínimo. Justifique. (1)

4. Considere a sucessão (u_n) dos números de Fibonacci: (1.5)

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

Prove por indução que, para $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

5. Seja $a > 0$, $m \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável.

a) Mostre que se $f' \geq m$ numa vizinhança $]a, \infty[$ de infinito, então $f(x) \geq m(x-a) + f(a)$ para x nessa vizinhança de infinito. (0.5)

b) Suponha que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Mostre que o $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ pode não existir. (0.5)

c) Suponha que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e que existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)$. Mostre que este último limite é necessariamente nulo. Sugestão: use a alínea **a)**. (0.5)

d) Suponha que f é duas vezes diferenciável, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e que existe $\lim_{x\to\infty} f''(x)$. Determine o valor deste último limite e justifique a resposta. Sugestão: Comece por analisar o comportamento de f' se for não nulo $\lim_{x\to\infty} f''(x)$. (0.5)

e) Suponha que f é duas vezes diferenciável e que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Prove que se $f(a) > 0$, então existe $x > a$ tal que $f''(x) > 0$. (0.5)