Análise Matemática I

1º Exame - 17 de Janeiro de 2002

Civ. e Ter.

Resolução

1.

a) $\lim \frac{n^n}{n^n+1} = \lim \frac{1}{1+1/n^n} = 1.$

b) $\lim \frac{(n+1)^6(n+2)^7}{(n+3)^{13}} = \lim \frac{(1+1/n)^6(1+2/n)^7}{(1+3/n)^{13}} = 1.$

c) $\lim \frac{13^{3n}}{n!} = \lim \frac{(13^3)^n}{n!} = \lim \frac{a^n}{n!} = 0$, onde $a = 13^3$.

2.

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{\sin x} = -2.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}.$

c) $\frac{d}{dx} e^{e^x} = e^{e^x} e^x.$

d) $\frac{d}{dx} \arctan(\ln x) = \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}.$

3.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n} = \frac{1}{1-1/\pi} = \frac{\pi}{\pi-1}$. Série geométrica de razão $1/\pi < 1$, absolutamente convergente.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!} = e^{\pi}$, pela definição da exponencial. Série absolutamente convergente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Série harmónica alternada, simplesmente convergente.

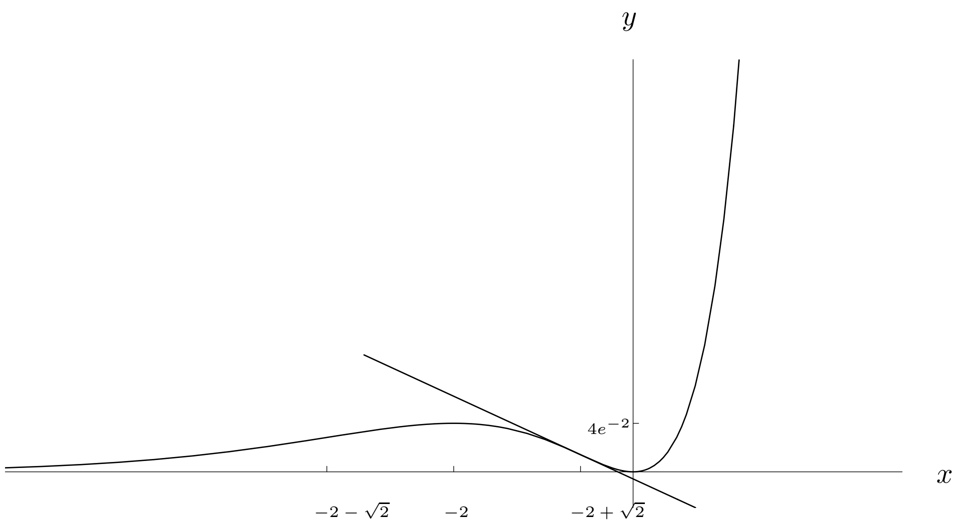
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi}{n}\right)^n$. O termo geral não converge para zero (mas sim para $e^{-\pi}$) pelo que a série diverge.

e) $\lim \frac{\pi^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{\pi^n n!} = \pi \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \pi \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\pi}{e} > 1$. Pelo critério d'Alembert a série diverge.

4.

$$\begin{aligned}
\left(x^2 e^x\right)' &= x e^x (2+x), \\
\left(x^2 e^x\right)'' &= \left(x^2+4x+2\right) e^x = \left(x - \left(-2-\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(-2+\sqrt{2}\right)\right) e^x,
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^2}{e^z} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} x^2 e^x = +\infty.$$



O gráfico de $x \mapsto x^2e^x$ e da recta tangente ao gráfico no maior ponto de inflexão da função.

A equação cartesiana da recta tangente ao gráfico em (a, a^2e^a) com $a := -2+\sqrt{2}$ é

$$\begin{aligned} y &= [ae^a(2+a)](x-a) + a^2e^a \\ &= \left(-2+\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\sqrt{2}\left(x-\left(-2+\sqrt{2}\right)\right) + \left(-2+\sqrt{2}\right)^2 e^{-2+\sqrt{2}} \\ &= 2\left(1-\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\left(x+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right) \\ &= 2\left(1-\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\left(x+\left(3-2\sqrt{2}\right)\right). \end{aligned}$$

5. Seja $a < b$. O Teorema de Rolle afirma que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, diferenciável em $]a, b[$, e se $f(a) = f(b)$, então existe um $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.
A função $x \mapsto x^2e^x - e\sqrt{x}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[0, 1]$. Logo, existe $c \in]0, 1[$ onde a sua derivada se anula. Em (c, c^2e^c) e $(c, e\sqrt{c})$ os gráficos de $x \mapsto x^2e^x$ e $x \mapsto e\sqrt{x}$ têm tangentes paralelas.

6. Fórmula de Mac-Laurin de segunda ordem com resto de Lagrange:

$$\sin(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^2 \sin(\pi\xi)}{2}x^2,$$

para um ξ entre 0 e x; e com resto de Peano:

$$\sin(\pi x) = \pi x + x^2 E_2(x, 0),$$

com $\lim_{x\to 0} E_2(x,0) = 0$. Série de Mac-Laurin:

$$\begin{aligned}\sin(\pi x) &= \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \frac{\pi^5 x^5}{5!} - \frac{\pi^7 x^7}{7!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

7.

a) Seja $n \in \mathbb{N}_1$. Se não existisse $x_n \in [0,1]$ tal que $f(x_n) > s - \frac{1}{n}$, então $f(z) \le s - \frac{1}{n}$ para todo o $z \in [0,1]$, pelo que $s = \sup_{[0,1]} f \le s - \frac{1}{n}$, o que é falso. Como $s - \frac{1}{n} < f(x_n) \le s$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, $(f(x_n)) \to s$.

b) Seja $n \in \mathbb{N}_1$. Se não existisse $x_n \in [0,1]$ tal que $f(x_n) > n$, então $f(z) \le n$ para todo o $z \in [0,1]$, pelo que $s = \sup_{[0,1]} f \le n < +\infty$, o que contradiz $s = +\infty$. Como $n < f(x_n)$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $(f(x_n)) \to +\infty$.

c) Como a sucessão (x_n) é limitada, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, tem uma subsucessão (x_{n_k}) convergente.

d) Pela definição de continuidade de Heine, se f é contínua, então

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right).$$

e) Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e (x_{n_k}) como na alínea **c)**. Como $(f(x_{n_k}))$ é uma subsucessão de $(f(x_n))$, o limite de $(f(x_{n_k}))$ é s. Logo, da alínea **d)**, $f(\lim x_{n_k}) = s$. Portanto, em $\lim x_{n_k}$ a função f atinge o seu supremo, pelo que tem máximo.

Aplicando o resultado agora provado a $-f$, concluimos que f tem mínimo.

Seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e considere-se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g(a+bx)$. A função f é contínua, pois é a composta de duas funções contínuas. Provámos que f tem máximo e mínimo, donde se conclui que g tem máximo e mínimo.