

Análise Matemática I
1º Exame - 20 de Janeiro de 99
Ele., Eng. Bio., Eng. Quím., Ges. e Quím.

Duração: 3 horas
Apresente os cálculos

1. Considere $S = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2 \text{ ou } |x - 3| \geq |x - 4|\}$.

a) Represente S na recta real. (2)

b) Identifique, caso existam em $\mathbb{R}$, $\inf S$, $\min S$, $\max S$ e $\sup S$. (1)

c) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em S que seja

• convergente, com limite em S ; (1)

• convergente, com limite no complementar de S ; (0.5)

• limitada e divergente; (0.5)

• divergente, sem subsucessões convergentes; (1)

• não monótona, divergente e sem subsucessões convergentes. (0.5)

2. Seja (a_n) uma sucessão de números reais.

a) Prove por indução matemática que (1.5)

$$s_n := \sum_{k=1}^n (a_{k+2} - a_k) = -a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

b) Suponha que a sucessão (a_n) é convergente com limite a . Calcule $\lim s_n$. (1)

c) Dê um exemplo de uma sucessão (a_n) divergente, tal que (s_n) seja convergente. (0.5)

3. Classifique as seguintes séries quanto à convergência:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$; (1)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$; (1)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right)^n$; (1)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-e^n}$. (1)

4. Considere a função $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por (3.5)

$$f(x) = \log x + 2 \log(1 - x).$$

Calcule os seus limites em 0 e 1, e os seus extremos e intervalos de monotonia.

5. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin(\pi \sin x)$.

- (1.5) **a)** A equação $f(x) = \sin x$ tem exactamente uma solução no intervalo $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$. Justifique.
- (1.5) **b)** Mostre que todas as derivadas de f têm máximo e mínimo.