Análise Matemática I

17 de Janeiro de 2002

Civ. e Ter.

2º Teste	–	Perguntas 2, 3, e 4	–	90 minutos
1º Exame	–	Todas as Perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Calcule os limites das sucessões com os seguintes termos gerais:

a) $\frac{n^n}{n^n+1}$. (1)
b) $\frac{(n+1)^6(n+2)^7}{(n+3)^{13}}$. (1)
c) $\frac{13^{3n}}{n!}$. (1)

2. Calcule os dois limites e as duas derivadas seguintes:

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$. (1)
b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. (0.5)
c) $\frac{d}{dx} e^{e^x}$. (1)
d) $\frac{d}{dx} \arctan(\ln x)$. (1)

3. Determine a natureza das séries; indique o valor das duas primeiras somas.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}$. (0.5)
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}$. (0.5)
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. (0.5)
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\pi}{n}\right)^n$. (0.5)
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$. (1)

4. Esboce o gráfico da função $x \mapsto x^2e^x$. Sobre o mesmo plano cartesiano, esboce a recta tangente ao gráfico no maior dos pontos de inflexão da função e escreva uma equação dessa recta. (3.5)

5. Os gráficos de $x \mapsto x^2e^x$ e de $x \mapsto e\sqrt{x}$ intersectam-se em $(0,0)$ e em $(1,e)$. Usando o Teorema de Rolle, mostre que existe $c \in]0,1[$ tal que os dois gráficos têm tangentes paralelas em (c, c^2e^c) e $(c, e\sqrt{c})$. Explicite as hipóteses do Teorema de Rolle. (2)

6. Escreva as fórmulas de Mac-Laurin de segunda ordem de (2)

$$x \mapsto \sin(\pi x)$$

com resto de Lagrange e com resto de Peano. Escreva também a série de Mac-Laurin da função.

7. Considere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e seja $s := \sup_{[0,1]} f \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Suponha que $s < +\infty$. Prove que para cada $n \in \mathbb{N}_1$ existe $x_n \in [0,1]$ tal que $f(x_n) > s - \frac{1}{n}$. Conclua que existe (x_n) tal que $f(x_n) \to s$. (0.5)

b) Suponha agora que $s = +\infty$. Prove que para cada $n \in \mathbb{N}_1$ existe $x_n \in [0,1]$ tal que $f(x_n) > n$. Conclua que existe (x_n) tal que $f(x_n) \to s$. (0.5)

c) Justifique que a sucessão (x_n) tem uma subsucessão (x_{n_k}) convergente. (1)

d) Suponha agora que f é contínua. Relacione o limite de $(f(x_{n_k}))$ com o limite de (x_{n_k}). (0.5)

e) Prove o Teorema de Weierstrass. (0.5)