DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Introdução à Análise Complexa

1º Semestre 2021/2022

2º Teste - Versão B

9 de Novembro de 2021

[2,0 val] 1. Considerando o ramo do logaritmo tal que $\operatorname{Arg} z \in [\pi, 3\pi[$, calcule, pela definição, o valor do integral

$$\int_C \log z \, dz,$$

em que C é semicircunferência centrada na origem, unindo $-10\mathrm{i}$ a $10\mathrm{i}$, e percorrida no sentido positivo.

Resolução:

Qualquer parametrização da semicircunferência de raio 10 serviria. Por exemplo $\gamma(\theta) = 10\, e^{\mathrm{i}\theta}$ com $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. O cuidado que é preciso ter é notar que o argumento do ramo do logaritmo indicado produz valores de $3\pi/2$ a $5\pi/2$. Portanto, ou se faz $\operatorname{Arg}(\gamma(\theta)) = \theta + 2\pi$, no caso da parametrização anterior, por exemplo, ou se faz uma parametrização com os ângulos coincidentes com o ramo do logaritmo indicado, neste caso com $\theta \in [3\pi/2, 5\pi/2]$. Seguindo esta última opção temos assim

$$\begin{aligned}
\int_C \log z \, dz &= \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \log(\gamma(\theta))\gamma'(\theta) d\theta = \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} (\log 10 + \mathrm{i}\theta) 10\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \\
&= 10 \log 10 \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} d\theta - 10 \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \theta e^{\mathrm{i}\theta} d\theta = \\
&= 10 \log 10 \left[e^{\mathrm{i}\theta}\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2} + 10\mathrm{i} \left[\theta e^{\mathrm{i}\theta}\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2} - 10 \left[e^{\mathrm{i}\theta}\right]_{3\pi/2}^{5\pi/2} = \\
&= 10(\log 10 - 1)\left(e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} - e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right) + 10\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{2} e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{2}} - \frac{3\pi}{2} e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}\right) = \\
&= 20\mathrm{i}(\log 10 - 1) - 40\pi.
\end{aligned}$$

[2,0 val] 2. (a) Determine o valor do integral

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2\mathrm{i}z}}{(z^2+9)^2} dz.$$

em que, para cada $R > 3$ fixo, Γ_R é a fronteira do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$ no semiplano superior, percorrida uma vez no sentido positivo.

[1,5 val] (b) Estabeleça a majoração

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{2\mathrm{i}z}}{(z^2+9)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-9)^2},$$

em que γ_R é a parte circular de Γ_R, parametrizada por $Re^{i\theta}$ com $\theta \in [0, \pi]$.

[1,5 val] (c) Combine os resultados das duas alíneas anteriores para obter o valor do integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2}dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2}dx.$$

Resolução:

(a) O denominador da função anula-se em $\pm 3\mathrm{i}$. Destas duas raízes só $+3\mathrm{i}$ se encontra no interior do semicirculo no semiplano superior, quando $R > 3$. Portanto, tendo em conta que a fronteira é percorrida uma única vez no sentido positivo e usando a fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada, com índice 1 em torno do ponto $3\mathrm{i}$, temos

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2}dz &= \oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z-3\mathrm{i})^2(z+3\mathrm{i})^2}dz = \oint_{\Gamma_R} \frac{\frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z+3\mathrm{i})^2}}{(z-3\mathrm{i})^2}dz \\
&= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z+3\mathrm{i})^2}\right]_{z=3\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{2\mathrm{i}e^{2\,\mathrm{i}\,z}(z+3\mathrm{i})^2 - 2(z+3\mathrm{i})e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z+3\mathrm{i})^4}\right]_{z=3\mathrm{i}} \\
&= \frac{7\pi e^{-6}}{54}.
\end{aligned}$$

(b) A semicircunferência γ_R tem comprimento πR pelo que

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2}dz\right| \leq \pi R \sup_{z\in\gamma_R}\left|\frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2}\right|.$$

Pela desigualdade triangular, o denominador é minorado por

$$|(z^2+9)^2| = |z^2+9|^2 \geq (|z|^2-9)^2 = (R^2-9)^2,$$

visto que sobre os pontos da semicircunferência percorridos por γ_R o módulo de z é constante e igual a R.

O numerador, por outro lado, tem módulo

$$|e^{2\,\mathrm{i}\,z}| = |e^{2\,\mathrm{i}\,(x+\mathrm{i}y)}| = |e^{-2\,y+2\mathrm{i}\,x}| = e^{-2\,y},$$

visto que o módulo da exponencial complexa é a exponencial da parte real do expoente. Sobre a semicircunferência de raio R, no semiplano superior, parametrizada por γ_R o máximo valor de $e^{-2\,y}$ é evidentemente obtido para o mínimo y, o qual é atingido no início e no fim da semicircunferência com $y = 0$. Conclui-se assim que

$$\sup_{z\in\gamma_R} |e^{2\,\mathrm{i}\,z}| = 1,$$

e portanto que

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2}dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-9)^2},$$

como pretendido.

(c) O integral em torno da fronteira Γ_R do semicírculo, calculado na alínea (a), para $R > 3$, é formado pela soma de dois integrais: um ao longo do eixo real, desde $z = x = -R$ até $z = x = R$, e outro ao longo da semicircunferência γ_R, estimado na alínea (b). O integral complexo ao longo do segmento de recta sobre o eixo real, de $-R$ a R é evidentemente igual ao integral em $\mathbb{R}$ habitual, com $x \in [-R, R]$ (bastaria usar a parametrização $\alpha(x) = x$ para verificá-lo). Portanto

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,x}}{(x^2+9)^2} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2} dz.$$

O integral complexo ao longo de Γ_R, à esquerda desta equação, mantém-se inalterado para qualquer $R > 3$, visto que a função é holomorfa no semiplano superior à excepção do ponto $z = 3\mathrm{i}$, pelo teorema da deformação (ou pela fórmula integral de Cauchy). Portanto, sendo constante, o seu limite quando $R \to \infty$ é esse valor $\frac{7\pi e^{-6}}{54}$ constante, calculado na alínea (a). Já do lado direito da igualdade, pela majoração da alínea (b) concluimos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,z}}{(z^2+9)^2} dz = 0.$$

Aplicando limites quando $R \to \infty$ à igualdade dos integrais anterior, deduzimos finalmente assim que o integral real, sobre o segmento de recta $x \in [-R, R]$ converge, quando $R \to \infty$ para o valor constante calculado na alínea (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,x}}{(x^2+9)^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,x}}{(x^2+9)^2} dx = \frac{7\pi e^{-6}}{54}.$$

Por fim, basta observar que $\cos(2x)$ é a parte real de $e^{2\,\mathrm{i}\,x}$ para concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+9)^2} dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\,\mathrm{i}\,x}}{(x^2+9)^2} dx \right) = \frac{7\pi e^{-6}}{54}.$$

3. Considere o caminho

$$\gamma(t) = \sin 4t + 2\,\mathrm{i}\,\cos t, \qquad t \in [\pi, 2\pi].$$

[1,0 val] a) Esboce a curva traçada por γ.

[2,0 val] b) Use o teorema fundamental do cálculo para determinar o valor de

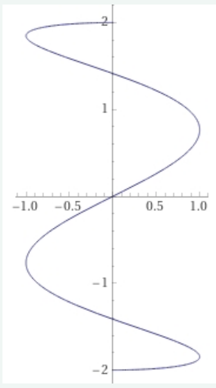
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-4}\, dz.$$

Resolução:

(a) Para entender a parametrização, observe-se que quando o parâmetro t evolui de π a 2π a parte imaginária da parametrização, $2\cos t$, cresce de forma monótona desde $2\cos\pi = -2$ até $2\cos 2\pi = 2$.

Simultanemanete, a parte real da parametrização, $\sin 4t$, devido ao factor $4t$, percorre 2 períodos completos do seno, desde $\sin 4\pi = 0$ até $\sin 8\pi = 0$.

Portanto, a curva no plano complexo começa em $z_0 = -2\mathrm{i}$ e sobe até $z_1 = 2\mathrm{i}$, fazendo dois ciclos sinusoidais completos na sua parte real.



(b) De forma intuitiva, tal como em $\mathbb{R}$, a primitiva duma função racional é obtida separando-a primeiro em fracções simples

$$\frac{1}{z^2-4} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+2},$$

para constantes A e B as quais, usando o método dos coeficientes indeterminados (ou até adivinhando) se conclui facilmente serem $A = \frac{1}{4}$ e $B = -\frac{1}{4}$. A primitiva de $\frac{1}{z^2-4}$ seria portanto, $\frac{1}{4}(\log(z-2) - \log(z+2))$.

Claro que tratando-se de funções complexas, é preciso ter o cuidado de escolher os ramos destes dois logaritmos de forma a que sejam holomorfos sobre a curva de integração, para que se possa usar o teorema fundamental do cálculo. Já sabemos que qualquer ramo do logaritmo, ou seja, qualquer escolha dum intervalo de largura 2π para o seu argumento, implica a existência duma semirecta de descontinuidade, quando os ângulos atingem os extremos desse intervalo. Ora, esta primitiva consiste na diferença de dois logaritmos complexos, um centrado em $z_0 = 2$

$$\log(z-2) = \log|z-2| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z-2)$$

e outro centrado em $z_0 = -2$

$$\log(z+2) = \log|z-(-2)| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z-(-2)).$$

A curva, representada na alínea (a), ao longo da qual queremos calcular o integral, está localizada entre estes dois pontos $z_0 = 2$ e $z_0 = -2$, e não queremos que os cortes de descontinuidade dos ramos destes dois logaritmos intersectem a curva, para que a primitiva sejam holomorfa sobre ela.

Assim, escolhemos o ramo de $\log(z-2)$ com $\mathrm{Arg} \in [0, 2\pi[$ de forma a cortar para a direita de $z_0 = 2$, e o ramo principal de $\log(z+2)$, com $\mathrm{Arg} \in]-\pi, \pi]$, de forma a cortar para a esquerda de $z_0 = -2$.

Tendo isso em conta podemos finalmente calcular, usando o teorema fundamental do cálculo,

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{1}{z^2-4}\,dz &= \frac{1}{4}(\log(z-2)-\log(z+2))\Big|_{-2\mathrm{i}}^{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{1}{4}(\log(2\mathrm{i}-2)-\log(2\mathrm{i}+2)) - \frac{1}{4}(\log(-2\mathrm{i}-2)-\log(-2\mathrm{i}+2)) \\
&= \frac{1}{4}(\log(\sqrt{8})+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}-\log(\sqrt{8})-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}) - \\
&\qquad -\frac{1}{4}(\log(\sqrt{8})+\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}-\log(\sqrt{8})+\mathrm{i}\frac{\pi}{4}) \\
&= -\frac{\pi}{4}\mathrm{i}.
\end{aligned}
$$