

Introdução à Análise Complexa

1º Semestre 2021/2022

2º TESTE - VERSÃO A

9 DE NOVEMBRO DE 2021

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
 - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
 - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
 - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
 - Classificação de 0 a 10.
 - Duração: 45 minutos.
-
-

1. Considere o caminho

$$\gamma(t) = \sin 3t + i \cos t, \quad t \in [0, \pi].$$

[1,0 val]

a) Esboce a curva traçada por γ .

[2,0 val]

b) Use o teorema fundamental do cálculo para determinar o valor de

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 3} dz.$$

[2,0 val]

2. Considerando o ramo do logaritmo tal que $\text{Arg } z \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, calcule, pela definição, o valor do integral

$$\int_C \log z dz,$$

em que C é semicircunferência centrada na origem, unindo -6 a 6 , e percorrida no sentido positivo.

[2,0 val]

3. (a) Determine o valor do integral

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{5iz}}{(z^2 + 4)^2} dz.$$

em que, para cada $R > 2$ fixo, Γ_R é a fronteira do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \text{Im } z \geq 0\}$ no semiplano superior, percorrida uma vez no sentido positivo.

[1,5 val]

(b) Estabeleça a majoração

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{5iz}}{(z^2 + 4)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 4)^2},$$

em que γ_R é a parte circular de Γ_R , parametrizada por $Re^{i\theta}$ com $\theta \in [0, \pi]$.

[1,5 val]

(c) Combine os resultados das duas alíneas anteriores para obter o valor do integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2 + 4)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos 5x}{(x^2 + 4)^2} dx.$$