DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Introdução à Análise Complexa

1º Semestre 2021/2022

1º Teste - Versão B

26 de Outubro de 2021

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 10.
- Duração: 45 minutos.

[2,0 val] 1. Determine todas as soluções em $\mathbb{C}$ da equação algébrica

$$z^6 - 2z^3 - 3 = 0.$$

[1,0 val] 2. (a) Quais os pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais $\cos z$ toma valores imaginários puros? (Sugestão: para $z = x + \mathrm{i}y$ separe $\cos z$ nas suas partes real e imaginária).

[1,0 val] (b) Mostre que o arco cosseno de $w \in \mathbb{C}$, entendido como o conjunto das soluções de $\cos z = w$ é dado por

$$z = \arccos w = -\mathrm{i}\log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

onde $\log$ é qualquer ramo do logaritmo complexo.

[2,0 val] (c) Determine e esboce a imagem do conjunto $\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : 0 \leq x < \pi, \quad y > 0\}$ através da aplicação $z \to \cos z$. Qual o interior e a fronteira dessa imagem?

[2,5 val] 3. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = 2|z|^2 - \bar{z}^2.$$

Determine em que pontos é diferenciável e em que pontos é holomorfa, calculando a derivada onde ela exista.

[1,5 val] 4. Prove que toda a função $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ inteira, tal que

$$u(x, y) - v(x, y) = c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

é necessariamente constante.