Introdução à Análise Complexa

1º Semestre 2021/2022

1º Teste - Versão A

26 de Outubro de 2021

[2,5 val] 1. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \bar{z}^2 + 2|z|^2.$$

Determine em que pontos é diferenciável e em que pontos é holomorfa, calculando a derivada onde ela exista.

Resolução:

Começamos por separar a função f nas suas partes real e imaginária. Para $z = x + \mathrm{i}y$,

$$f(z) = \bar{z}^2 + 2|z|^2 = (x - \mathrm{i}y)^2 + 2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2) - \mathrm{i}2xy + 2(x^2 + y^2),$$

donde

$$u(x, y) = \mathrm{Re}(f)(x, y) = 3x^2 + y^2, \qquad v(x, y) = \mathrm{Im}(f)(x, y) = -2xy.$$

Estas funções são polinómios em $\mathbb{R}^2$ pelo que são $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e consequentemente f é uma função diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ em todo o plano. Pelo teorema de Cauchy-Riemann podemos então concluir que f será diferenciável no sentido complexo nos pontos em que forem satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 6x = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2x \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2y = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y. \end{cases}$$

A segunda equação é sempre satisfeita, e a primeira apenas quando $x = 0$. Concluimos então que f é diferenciável complexa em todos os pontos do eixo imaginário $\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : x = 0, y \in \mathbb{R}\}$. Como este conjunto, uma recta, tem interior vazio, a função não é holomorfa em ponto nenhum.

Nos pontos $z = \mathrm{i}y$ em que é diferenciável a sua derivada vale

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(0, y) = -2y.$$

[2,0 val] 2. Determine todas as soluções em $\mathbb{C}$ da equação algébrica

$$z^6 + 4z^3 - 5 = 0.$$

Resolução:

A equação pode escrever-se como um polinómio de grau 2 em z^3:

$$(z^3)^2 + 4(z^3) - 5 = 0,$$

donde, aplicando a fórmula resolvente se obtém

$$z^3 = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = -5 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Para obter as 6 raízes do polinómio de grau 6 original há que determinar agora as 3 raízes cúbicas de cada um destes dois casos.

Usando coordenadas polares obtemos:

$$z^3 = |z|^3 e^{\mathrm{i}3\theta} = -5 = 5e^{\mathrm{i}\pi},$$

de onde se obtêm as soluções $|z| = \sqrt[3]{5}$, com $3\theta = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$, com $k = 0, 1, 2$. Estas três raízes são assim, em coordenadas cartesianas, dadas por

$$z_1 = \sqrt[3]{5}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\Big), \quad z_2 = -\sqrt[3]{5}, \quad z_3 = \sqrt[3]{5}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\Big).$$

As restantes 3 raízes são obtidas de

$$z^3 = |z|^3 e^{\mathrm{i}3\theta} = 1 = 1e^{\mathrm{i}0},$$

pelo que $|z| = \sqrt[3]{1} = 1$, com $3\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2}{3}k\pi$, com $k = 0, 1, 2$ e portanto

$$z_4 = 1, \quad z_5 = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\Big), \quad z_6 = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\Big).$$

[1,0 val] 3. (a) Quais os pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais $\operatorname{sen} z$ toma valores imaginários puros? (Sugestão: para $z = x + \mathrm{i}y$ separe $\operatorname{sen} z$ nas suas partes real e imaginária).

[1,0 val] (b) Mostre que o arco seno de $w \in \mathbb{C}$, entendido como o conjunto das soluções de $\operatorname{sen} z = w$ é dado por

$$z = \operatorname{arcsen} w = -\mathrm{i} \log \mathrm{i}(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

onde $\log$ é qualquer ramo do logaritmo complexo.

[2,0 val] (c) Determine e esboce a imagem do conjunto $\{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad y \geq 0\}$ através da aplicação $z \to \operatorname{sen} z$. Qual o interior e a fronteira dessa imagem?

Resolução:

(a) Para $z = x + \mathrm{i}y$ e usando as propriedades conhecidas do seno da soma temos

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(x + \mathrm{i}y) = \operatorname{sen} x \cos \mathrm{i}y + \cos x \operatorname{sen} \mathrm{i}y.$$

Mas também sabemos que $\cos \mathrm{i}y = \cosh y$ e que $\operatorname{sen} \mathrm{i}y = \mathrm{i} \operatorname{senh} y$ pelo que concluimos que

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + \mathrm{i} \cos x \operatorname{senh} y.$$

Assim, $\operatorname{sen} z$ toma valores imaginários puros se e só se a sua parte real for nula, ou seja, quando $\operatorname{sen} x \cosh y = 0$. Tendo em conta que o coseno hiperbólico (real) não se anula, tal será verificado então quando $\operatorname{sen} x = 0$, ou seja, quando $x = k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. A resposta é portanto que $\operatorname{sen} z$ toma valores imaginários puros nos pontos da forma $z = k\pi + \mathrm{i}y$ com $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$.

(b) Para resolver $\operatorname{sen} z = w$ em ordem a z, dado $w \in \mathbb{C}$, usamos a definição do seno complexo

$$\operatorname{sen} z = w \Leftrightarrow \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = w,$$

e, multiplicando a equação por $e^{\mathrm{i}z}$, transformamo-la numa equação quadrática para $e^{\mathrm{i}z}$

$$(e^{\mathrm{i}z})^2 - 1 - 2\mathrm{i}we^{\mathrm{i}z} = 0,$$

a qual pode agora ser resolvida pela fórmula resolvente:

$$e^{\mathrm{i}z} = \frac{2\mathrm{i}w \pm \sqrt{(2\mathrm{i}w)^2 + 4}}{2} = \mathrm{i}w \pm \sqrt{-w^2 + 1} = \mathrm{i}(w \pm \sqrt{w^2 - 1}).$$

As soluções deste problema são, então, todos os valores de $\mathrm{i}z$ tal que a exponencial leva para a imagem $\mathrm{i}(w \pm \sqrt{w^2 - 1})$ ou seja, todos os possíveis logaritmos deste complexo ou, mais correctamente, todos os ramos do logaritmo. Assim, escolha-se um qualquer ramo do logaritmo complexo, que designaremos por $\log$ e os restantes ramos diferem pela soma de $2k\pi\mathrm{i}$ para $k \in \mathbb{Z}$. E assim

$$\mathrm{i}z = \log \mathrm{i}(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) + 2k\pi\mathrm{i} \Leftrightarrow z = -\mathrm{i} \log \mathrm{i}(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Começamos por determinar a imagem da fronteira do domínio.

Para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $y = 0$, temos precisamente a função seno restrita a valores reais da variável $z = x$ pelo que a sua imagem $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x$ é o seno real tradicional, que toma todos os valores no eixo real $-1 < \operatorname{sen} x < 1$.

Para $x = \pi/2$ e $y \geq 0$, que faz parte da fronteira do domínio, já não lhe pertencendo, temos $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(\pi/2 + \mathrm{i}y) = \operatorname{sen} \pi/2 \cosh y + \mathrm{i} \cos \pi/2 \operatorname{senh} y$. E como $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$ e $\cos \pi/2 = 0$ obtemos que, novamente, a imagem desta semi-recta da fronteira do domínio está sobre o eixo real $\operatorname{sen}(\pi/2 + \mathrm{i}y) = \cosh y$, que toma valores em $[1, +\infty[$ para $y \geq 0$.

Analogamente, para $x = -\pi/2$ e $y \geq 0$ obtemos $\operatorname{sen}(-\pi/2 + \mathrm{i}y) = -\cosh y$ cuja imagem, também real, toma valores em $]-\infty, -1]$ para $y \geq 0$.

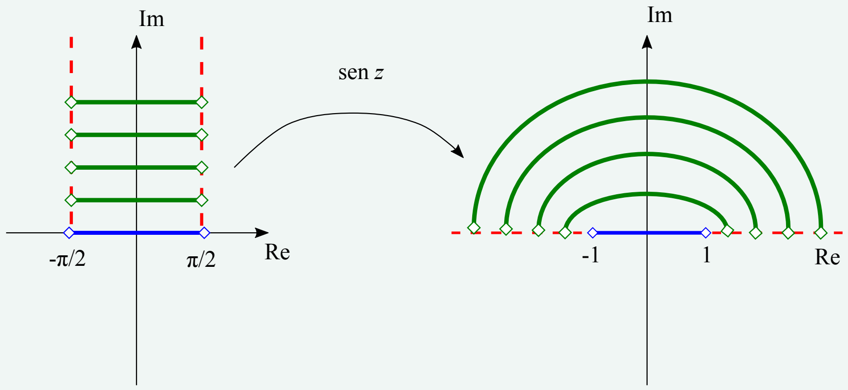
Concluindo, a fronteira do domínio é transformada em todo o eixo real, sendo que só o segmento $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $y = 0$ realmente pertence ao domínio, transformado no intervalo real $]-1, 1[$ será a única porção pertencente ao contradomínio.

Intuitivamente, bastaria agora ver que para $x = 0$ e $y \geq 0$, a semi-recta vertical a meio do domínio, é transformada em $\operatorname{sen}(\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\operatorname{senh} y$, ou seja, no semi-eixo imaginário positivo do contradomínio, já que a imagem de $[0, \infty[$ pelo seno hiperbólico é $[0, \infty[$, para se conjecturar que muito provavelmente a imagem do interior do domínio será todo o semi-plano complexo com parte imaginária positiva, acima do eixo real que é precisamente a imagem da fronteira do domínio.

Para justificar com mais cuidado este último facto, considerem-se os segmentos de recta horizontais $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $y = y_0 \geq 0$ fixo. Evidentemente, a reunião destes segmentos, para todos os $y_0 \geq 0$, produz o domínio. Já conhecemos a imagem do segmento com $y_0 = 0$, que é o segmento real entre -1 e 1. Para $y_0 > 0$ a imagem é $\operatorname{sen}(x + \mathrm{i}y_0) = \operatorname{sen} x \cosh y_0 + \mathrm{i} \cos x \operatorname{senh} y_0$. Chamando $A = \cosh y_0 = \frac{e^{y_0}+e^{-y_0}}{2}$ e $B = \operatorname{senh} y_0 = \frac{e^{y_0}-e^{-y_0}}{2}$ temos, evidentemente $A > B > 0$ pelo que a imagem do segmento de recta é

$$\operatorname{sen}(x + \mathrm{i}y_0) = A \operatorname{sen} x + \mathrm{i}B \cos x,$$

que traça meia elipse, com semieixo maior horizontal A e semieixo menor vertical B, no semi-plano complexo de imaginários positivos, à medida que x varia de $-\pi/2$ até $\pi/2$. A reunião destas elipses cobre todo o semi-plano complexo de imaginários positivos.



Por fim, a fronteira do contradomínio é o eixo real, sendo o seu interior o semi-plano de imaginários positivos.

[1,5 val] 4. Prove que toda a função $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ inteira, tal que

$$u(x, y) + v(x, y) = c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

é necessariamente constante.

Resolução:

Sendo f uma função inteira, então ela é diferenciável complexa em todos os pontos do plano complexo e, pelo Teorema de Cauchy-Riemann, é diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ para todos os $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann. Em particular, as partes real e imaginária de f têm derivadas parciais em ordem a x e y em todos os pontos do plano. Assim, derivando a relação $u(x,y)+v(x,y)=c$ em ordem a x obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0,$$

enquanto que derivando em ordem a y

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0.$$

Mas, pelas relações de Cauchy-Riemann, estas quatro derivadas estão relacionadas duas a duas em todos os pontos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y), \end{cases}$$

donde podemos substituir as derivadas parciais de v das duas equações obtidas anteriormente apenas por derivadas parciais de u ficando com

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

e a única solução deste sistema não singular de duas equações a duas incógnitas é $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$. E pelas equações de Cauchy-Riemann será também, então, $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0$. Ora, sabe-se da teoria de cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$ que funções diferenciáveis com gradiente nulo em domínios abertos e conexos, como é o caso aqui de $\mathbb{R}^2$, são necessariamente constantes, pelo que $u(x,y)=c_1$ e $v(x,y)=c_2$ em todos os $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ para alguns $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, concluindo-se portanto que $f(z)=c_1+\mathrm{i}c_2$ é constante.