

Introdução à Análise Complexa

1º Semestre 2021/2022

1º TESTE - VERSÃO A

26 DE OUTUBRO DE 2021

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
 - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
 - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
 - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
 - Classificação de 0 a 10.
 - Duração: 45 minutos.
-
-

[2,5 val] 1. Considere a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \bar{z}^2 + 2|z|^2.$$

Determine em que pontos é diferenciável e em que pontos é holomorfa, calculando a derivada onde ela exista.

[2,0 val] 2. Determine todas as soluções em \mathbb{C} da equação algébrica

$$z^6 + 4z^3 - 5 = 0.$$

[1,0 val] 3. (a) Quais os pontos $z \in \mathbb{C}$ para os quais $\operatorname{sen} z$ toma valores imaginários puros?
(Sugestão: para $z = x + iy$ separe $\operatorname{sen} z$ nas suas partes real e imaginária).

[1,0 val] (b) Mostre que o arco seno de $w \in \mathbb{C}$, entendido como o conjunto das soluções de $\operatorname{sen} z = w$ é dado por

$$z = \operatorname{arcsen} w = -i \log i(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

onde \log é qualquer ramo do logaritmo complexo.

[2,0 val] (c) Determine e esboce a imagem do conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y \geq 0\}$ através da aplicação $z \rightarrow \operatorname{sen} z$. Qual o interior e a fronteira dessa imagem?

[1,5 val] 4. Prove que toda a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ inteira, tal que

$$u(x, y) + v(x, y) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

é necessariamente constante.