

Introdução à Análise Complexa

1º Período 2021/2022

TESTES DE RECUPERAÇÃO / EXAME

Versão B

22 DE NOVEMBRO DE 2021

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
 - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
 - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
 - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
 - Classificação dos testes de 0 a 10.
 - Classificação do exame de 0 a 20.
 - Duração do 1º ou 2º teste: 45 minutos.
 - Duração do exame: 1 hora e 30 minutos.
-
-

Apresente e justifique todos os cálculos

1º TESTE DE RECUPERAÇÃO/EXAME (1ª PARTE)

- [2,0 val] 1. Determine todas as soluções em \mathbb{C} da equação
- $$z^2 = -2\bar{z}.$$
- [1,5 val] 2. Determine, e esboce, o conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ do plano complexo em que a aplicação $z \mapsto z^2 - 2iz$ expande localmente.
- [1,5 val] 3. Considere a função $f(z) = \log\left(\frac{z+3i}{z-i}\right)$, considerando, o ramo principal do logaritmo.
- [1,5 val] a) Indique o domínio de f e faça o estudo da sua continuidade.
- [1,5 val] b) Indique em que pontos f é holomorfa e determine a derivada nesses pontos.
- [2,0 val] 4. Considere o ramo principal da função $f(z) = (-iz)^{\frac{1}{2}}$. Determine a imagem do conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 4 \text{ e } \operatorname{Im} z < 0\}$ através desta aplicação.
- [1,5 val] 5. Assuma que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função inteira. Prove que, então,
- $$g(x + iy) = e^{u(x, -y) - iv(x, -y)}$$
- também é inteira.
-

2º TESTE DE RECUPERAÇÃO/EXAME (2ª PARTE)

- [2,0 val] 1. a) Determine a série de Taylor de função
- $$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1},$$
- em torno de $z_0 = i$ e indique o respectivo raio de convergência (Sug: Decomponha em frações simples).
- [1,5 val] b) Use a alínea anterior para obter o valor do integral
- $$\oint_{\gamma} \frac{z^2}{(z^2 - 1)(z - i)^{10}} dz,$$
- em que γ é parametrizada por $\gamma(t) = i - e^{6it}$, com $t \in [0, \pi]$.
2. Seja $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por
- $$u(x, y) = \cos(3\alpha x) \sinh(\beta y),$$
- onde α e β são constantes reais.
- [1,5 val] (a) Determine os valores de α e β de modo a que u seja a parte real de uma função inteira.
- [1,5 val] (b) Para $\alpha = 1$, $\beta = 3$, determine a função inteira tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(1) = i$.
- [2,0 val] 3. Determine o valor de
- $$\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \operatorname{sen}(e^{i\theta}) d\theta.$$
- Sugestão: Reconheça nesta fórmula um integral complexo, pela definição, para a parametrização $e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e reverta a parametrização.
- [1,5 val] 4. Seja f uma função inteira tal que $f(iz) = f(z)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe uma função inteira g tal que $f(z) = g(z^4)$.