DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Introdução à Análise Complexa

1º Período 2021/2022

TESTES DE RECUPERAÇÃO / EXAME

Versão A

22 DE NOVEMBRO DE 2021

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação dos testes de 0 a 10.
- Classificação do exame de 0 a 20.
- Duração do 1º ou 2º teste: 45 minutos.
- Duração do exame: 1 hora e 30 minutos.

Apresente e justifique todos os cálculos

1^{o} Teste de Recuperação/Exame (1^{a} Parte)

[2,0 val] 1. Considere o ramo principal da função $f(z) = (\mathrm{i}z)^{\frac{1}{3}}$. Determine a imagem do conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 8 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} z > 0\}$ através desta aplicação.

[1,5 val] 2. Determine, e esboce, o conjunto de pontos $z \in \mathbb{C}$ do plano complexo em que a aplicação $z \mapsto z^2 + 2z$ contrai localmente.

[2,0 val] 3. Determine todas as soluções em $\mathbb{C}$ da equação

$$z^2 = \bar{z}.$$

4. Considere a função $f(z) = \log\left(\dfrac{z - \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}\right)$, considerando, o ramo principal do logaritmo.

[1,5 val] a) Indique o domínio de f e faça o estudo da sua continuidade.

[1,5 val] b) Indique em que pontos f é holomorfa e determine a derivada nesses pontos.

[1,5 val] 5. Assuma que $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função inteira. Prove que, então,

$$g(x + iy) = (u(x, -y) - iv(x, -y))^2$$

também é inteira.

2^{o} Teste de Recuperação/Exame (2^{a} Parte)

1. Seja $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x, y) = \operatorname{sen}(\alpha x) \cosh(2\beta y),$$

onde α e β são constantes reais.

[1,5 val] (a) Determine os valores de α e β de modo a que v seja a parte imaginária de uma função inteira.

[1,5 val] (b) Para $\alpha = 2$, $\beta = 1$, determine a função inteira tal que $\operatorname{Im}(f) = v$ e $f(\mathrm{i}) = 1$.

[2,0 val] 2. Determine o valor de

$$\int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{i}\theta} e^{e^{\mathrm{i}\theta}} \, d\theta.$$

Sugestão: Reconheça nesta fórmula um integral complexo, pela definição, para a parametrização $e^{\mathrm{i}\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi]$ e reverta a parametrização..

[2,0 val] 3. a) Determine a série de Taylor de função

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1},$$

em torno de $z_0 = 1$ e indique o respectivo raio de convergência (Sugestão: Decomponha em fracções simples).

[1,5 val] b) Use a alínea anterior para obter o valor do integral

$$\oint_\gamma \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z - 1)^{13}} \, dz,$$

em que γ é parametrizada por $\gamma(t) = 1 + e^{-3\mathrm{i}t}$, com $t \in [0, 6\pi]$.

[1,5 val] 4. Seja f uma função inteira tal que $f(e^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} z) = f(z)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe uma função inteira g tal que $f(z) = g(z^6)$.