Introdução à Análise Complexa

Problemas propostos

Semanas 6 - 2 a 5 de Novembro de 2021

1. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x,y) = e^{-y}x + e^{x}y$?

2. Decida se existem, ou não, funções analíticas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condiçoes, e em caso afirmativo determine-as:

   a) $\mathrm{Re} f(x+iy) + \mathrm{Im} f(x+iy) = x^2 - y^2$.

   b) $\mathrm{Im} f(x+iy) = 3x^3y + x + \alpha xy^3$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e satisfazendo $f(i) = 2$.

3. Determine funções harmónicas conjugadas para as seguintes funções:

   a) $u(x,y) = x^2 + xy - y^2$;

   b) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$;

   c) $u(x,y) = e^{-y}(x \cos x - y \operatorname{sen} x)$;

   d) $u(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2y$.

4. Sejam α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x+iy) = \alpha(x) - 3xy^2 + i(3x^2y + \beta(y))$$

   para $x, y \in \mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher α, β de modo a que f seja uma função inteira. Em caso afirmativo, determine α, β de maneira a $f(1) = i$.

5. Considere a seguinte função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x+y)$$

   a) Mostre que u é uma função harmónica.

   b) Determine a função harmónica conjugada v tal que $v(0,0) = 0$.

   c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz$$

   onde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy$ e C é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ percorrida no sentido positivo.

6. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = \mathrm{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}\,[g(x+iy)]$.

a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

b) Mostre que u é uma função harmónica.

c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

7. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira tal que existe um $M > 0$ para o qual $|f(z)| \geq M$, para todo o $z \in C$. Prove que então f é constante.

8. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, tal que existem $M, R > 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Mostre que então f é um polinómio de grau $\leq n$.
Obs: Este resultado mostra que funções inteiras, não polinomiais, têm necessariamente de crescer em módulo mais rapidamente que qualquer polinómio, quando $z \to \infty$. Como se justifica esta afirmação, por exemplo, no caso da função inteira (e não polinomial) $\cos z$?