Introdução à Análise Complexa
Problemas propostos

Semana 5 - 25 a 29 de Outubro de 2021

1. Determine, pela definição, os valores dos seguintes integrais:

   a) $\int_C |z|\, dz$ em que C é a semicircunferência centrada na origem, percorrida em sentido directo, unindo $-2i$ a $2i$.

   b) $\int_C \bar{z}\, dz$ em que C é o segmento de recta unindo 1 a $2+3i$.

   c) $\int_C z \cos z^2 dz$ em que C é o segmento de recta unindo 0 a πi.

2. Considere o caminho γ_1 que consiste no segmento de recta unindo o ponto inicial 0 ao ponto final $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, e considere também o caminho γ_2 entre esses mesmos pontos dado pela parábola $t \mapsto t + it^2$.

   a) Calcule, utilizando a definição, $\int_{\gamma_k} e^z dz$, com $k = 1, 2$.

   b) Calcule $\int_{\gamma_k} \bar{z}^2 dz$ com $k = 1, 2$.

   c) Comente os resultados que obteve nas alíneas anteriores.

3. Calcule o integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz$, onde γ é percorrida no sentido positivo e

   a) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \ , \ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, e escolha-se o ramo da função $\sqrt{z}$ que verifica $\sqrt{1} = 1$,

   b) $\gamma = \{z \in C : |z| = 1 \, , \, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$, e escolha-se o ramo da função $\sqrt{z}$ que verifica $\sqrt{-i} = (1-i)/\sqrt{2}$.

4. Seja
$$f(z) = z^{-1+i} = \exp[(-1+i)\log z] \quad , \quad |z| > 0 \ \text{ e } \ 0 \leq \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$$
Calcule
$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$
onde a curva é percorrida no sentido positivo.

5. Seja $\gamma(t) = Re^{it}$ para $0 \leq t \leq \pi$. Mostre que se $R > 2$, então
$$\Big| \int_\gamma \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \Big| \leq \pi \frac{R(2R^2+1)}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

6. Considere o caminho $z : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$, definido por $z(\theta) = e^{-\theta + i\theta}$, que representa parametricamente a curva γ. Considere ainda $\alpha := \int_\gamma z\, dz$.

   a) Esboce γ.

   b) Calcule α usando a definição.

   c) Calcule α usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

   d) Calcule α usando o Teorema de Cauchy para substituir γ por um segmento de recta.

7. Seja γ uma curva fechada simples com orientação positiva. Usando o Teorema de Green, mostre que a área no interior de γ pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2i} \int_\gamma \bar{z}\, dz.$$

8. Determine se as seguintes funções são primitiváveis no domínio indicado e em caso afirmativo determine uma primitiva.

   a) $z^2 e^z$ em $\mathbb{C}$ b) $\dfrac{\cos z}{z}$ em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ c) $\dfrac{1}{z(z-1)}$ em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

   d) $\dfrac{1}{z(z-1)}$ em $\mathbb{C} \setminus \{x + 0i : 0 \leq x \leq 1\}$ e) $f(x + iy) = 3y + x^2 - y^2 + i(2xy - 3x)$ em $\mathbb{C}$

9. Seja f holomorfa numa aberto A e γ um caminho fechado em A. Mostre que, para todo o z_0 que não está sobre a curva percorrida por γ se tem

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

   Obs: O caminho não é necessariamente homotópico a um ponto em A nem $z_0 \in A$.

10. Determine todos os possíveis valores do integral

$$\oint_C \frac{z \cos z}{z^2 + 1}\, dz,$$

   onde C é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

11. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designe-se por $\gamma(a, r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{it}$, ($t \in [0, 2\pi]$). Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma(a,r)} (z^2 + 1)^{-1} dz$ para:

   a) $\gamma(1, 1)$ b) $\gamma(i, 1)$ c) $\gamma(-i, 1)$ d) $\gamma(0, 2)$ e) $\gamma(3i, \pi)$

12. Calcule o seguinte integral

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{z^3 + e^z}{z^2 + z - 2}\, dz,$$

   em que a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

13. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z-\pi i|+|z-2\pi i|=\frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

a) $\displaystyle\oint_\Gamma z^3\cosh z\,dz$ b) $\displaystyle\oint_\Gamma e^{\cos^3 z}\,dz$ c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z-\frac{i}{2}}\,dz$ d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2+\pi^2}\,dz$

e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z-\pi i}{z^2(2z-\pi i)}dz$ f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z-2\pi i)^3}$ g) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-i\pi)^{11}}\,dz$

14. Usando o valor do integral $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$, prove que

$$\int_0^\pi e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta)d\theta=\pi.$$

15. Considere a função complexa definida por

$$f(z)=f(x+iy)=x^2-y^2-2xy+2y+i\left(x^2-y^2+2xy-2x\right).$$

Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2}\,dz,$$

onde $C=\{z\in\mathbb{C}:|z-i|=4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.