Introdução à Análise Complexa

Problemas propostos

Semana 4 - 18 a 22 de Outubro de 2021

1. Determine os domínios de diferenciabilidade e de analiticidade das seguintes funções, isto é, os conjuntos de pontos de $\mathbb{C}$ onde admitem derivada e onde são analíticas, calculando a derivada onde ela exista:

   a) $xy - ix$ b) $x^2 - y^2 + 2ixy$ c) $x^2 - y + i(x - y^2)$ d) $x^2 - y^2 + 2i|xy|$ e) $z^2 - 3z$

   f) $\cos(3z) - i$ g) $\mathrm{Im}(z^2)$ h) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ i) $z(e^{iz} - e^{-iz})$ j) $|z|\bar{z}$

   k) $\overline{e^{z}}$ l) $ze^{\bar{z}}$ m) $\frac{1}{z} - \bar{z}$

2. Calcule as derivadas das seguintes funções:

   a) $\operatorname{sen}(z) + 3z^2 - ze^{z^3}$ b) $\cos(z) + (2z+1)^z$ c) $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

3. Deduza as equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, da seguinte forma. Seja $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função definida num conjunto aberto A, tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$, para $z \in A$. Seja $T : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ a aplicação da mudança de coordenadas polares dada por $T(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = \rho\, e^{i\theta}$ (Naturalmente, qualquer outro intervalo de comprimento 2π, para domínio dos ângulos θ, serviria igualmente). Defina $\tilde{u}(\rho, \theta) = u \circ T(\rho, \theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = u(\rho\, e^{i\theta})$ e $\tilde{v}(\rho, \theta) = v \circ T(\rho, \theta) = v(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) = v(\rho\, e^{i\theta})$.

   a) Mostre que T, como aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, é continuamente diferenciável e tem uma inversa, também continuamente diferenciável.

   b) Usando o teorema da diferenciação de funções compostas, em $\mathbb{R}^2$, mostre que f é analítica no conjunto $A \setminus \{x + iy : x \geq 0\,, y = 0\}$ se e só se $(\tilde{u}, \tilde{v}) : T^{-1}(A) \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann polares, em $T^{-1}(A)$

   $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}.$$

   c) Determine a fórmula para $f'(z) = f'(\rho\, e^{i\theta})$ em coordenadas polares, em função das derivadas parciais de $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ em ordem a ρ e θ.

   d) Sabendo que a função $\log z$ é dada em coordenadas polares por $\log z = \log(\rho\, e^{i\theta}) = \log\rho + i\theta$ verifique que é diferenciável e determine a sua derivada.

4. Mostre que $f(z) = \sqrt{|xy|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada (no sentido complexo) nesse ponto. Porque é que isso não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\overline{z}$.

   a) Determine o subconjunto de $\mathbb{C}$ onde f é diferenciável, bem como o seu domínio de analiticidade.

   b) Mostre que f transforma circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r'. Para que valores de r se tem $r = r'$?

6. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que se verifica uma das condições

   a) $\mathrm{Re}(f)(z) \equiv$ (constante),

   b) $f'(z) \equiv 0$,

   c) $|f(z)| \equiv$ (constante).

   Mostre que então $f(z) \equiv$ (constante).

7. Mostre que se f e $\overline{f}$ são ambas inteiras (i.e. diferenciáveis em todo o $\mathbb{C}$), então f é constante.

8. Seja $A \subset \mathbb{C}$ um aberto e defina $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Se f é uma função analítica em A mostre que $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ é uma função analítica em A^*.

9. Seja $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{C}$ abertos, uma função diferenciável, no sentido $\mathbb{R}^2$, no ponto $z_0 \in A$. Sabendo que, para $z = x + iy$, se tem $x = (z + \bar{z})/2$ e $y = (z - \bar{z})/2i$, podemos interpretar $f(x, y)$ como uma função de z e $\bar{z}$. Defina

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

   a) Considere caminhos regulares $\alpha(t)$ em A, com $\alpha(0) = z_0$ e os correspondentes caminhos transformados $\beta(t) = f(\alpha(t))$. Prove a fórmula

$$\beta'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\alpha'(0) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\,\overline{\alpha'(0)}.$$

   b) Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em z_0 se e só se

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

   Nota: este exercício mostra que as funções holomorfas são, neste sentido, aquelas que não dependem de $\bar{z}$.

   c) Conclua que, se f for conforme em z_0, então são válidas as equações de Cauchy-Riemann e portanto f é diferenciável complexa em z_0, com $f'(z_0) \neq 0$.