Introdução à Análise Complexa

Problemas propostos

Semana 3 - 11 a 15 de Outubro de 2021

1. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine se é aberto, fechado, limitado e compacto. Além disso, indique o interior, exterior, fronteira e aderência.

   a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
   b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2\}$
   c) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$
   d) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$
   e) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 3\}$
   f) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$
   g) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\} \cup \{0\}$
   h) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 2\}$
   i) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0,\ 1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2\}$
   j) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0,\ 1 \leq \mathrm{Im}(z) < 2\}$
   k) $\{z \in \mathbb{C} : z = p + iq,\ p, q \in \mathbb{Q}\}$
   l) $\{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi i r n},\ n \in \mathbb{Z}\}\quad r \in \mathbb{Q}$ fixo
   m) $\{z \in \mathbb{C} : z = e^{2\pi i s n},\ n \in \mathbb{Z}\}\quad s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ fixo

2. Calcule os seguintes limites ou mostre que não existem

   a) $\lim \frac{n+2i}{7+3ni}$ b) $\lim \frac{\mathrm{senh}\,(ni)}{n}$ c) $\lim e^{in}$ d) $\lim (1+i)^{-n}$

   e) $\lim_{z\to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$ f) $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, z}{z}$ g) $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, z}{\mathrm{senh}\,(iz)}$ h) $\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$

3. Ao longo de que semi-rectas começando na origem (identificadas por $\mathrm{Arg}(z) = \text{const.}$), existe o limite $\lim_{z\to\infty} |e^z|$?

4. Para que valores de z é convergente a sucessão nz^n?

5. Mostre que, se $|z| > 1$ então $\lim \dfrac{z^n}{n} = \infty$.

6. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa e indique os pontos de $\mathbb{C}$ onde são contínuas:

   a) $\mathrm{Re}(z)$ b) $\overline{z}$ c) $|z|$ d) z^2 e) $z|z|$

   f) $e^{\cos z}$ g) $\log(z+2)$ (Ramo Principal) h) $\frac{1}{(3-5z)^3}$ i) $\frac{1+z}{(\mathrm{sen}\, z)^2}$

7. Mostre que, se f é contínua em $z_0 \in D_f$ e $f(z_0) \neq 0$, então existe uma bola centrada em z_0 tal que $f(z) \neq 0$ para todos os pontos $z \in D_f$ nessa bola.

8. Seja $f : D_f \to \mathbb{C}$. Mostre que f é contínua no seu domínio D_f se e só se, qualquer que seja o aberto $A \subset \mathbb{C}$, existe um aberto O tal que $f^{-1}(A) = O \cap D_f$.

9. Seja $f : D_f \to \mathbb{C}$ e $K \subset D_f$ um subconjunto compacto. Mostre que, se f é contínua em D_f, então $f(K)$ é compacto.

10. Considere a esfera de Riemann dada por $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ e a correspondente projecção estereográfica sobre o plano complexo, que a cada ponto $(x_1, x_2, x_3) \in S$, exceptuando o pólo norte $(0, 0, 1)$, faz corresponder um ponto do plano $z \in \mathbb{C}$. Mostre que a correspondência entre z e (x_1, x_2, x_3) é dada por

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \qquad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

ou inversamente

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$