Introdução à Análise Complexa

Problemas propostos

Semana 2 - 4 a 8 de Outubro de 2021

1. Escreva na forma $a + bi$ os seguintes números complexos

   a) $2\,e^{\frac{4\pi i}{3}}$ b) e^{2+i} c) $\operatorname{sen}(1+i)$ d) $\cos(2+3i)$

2. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$;

   c) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$; d) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$;

   e) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$; f) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$;

   g) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$; h) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

3. Prove que $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são simultaneamente reais se e só se z é real.

4. Mostre que os períodos das funções sen e cos são da forma $2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; e que os períodos das funções senh e cosh são da forma $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

5. Mostre que $\operatorname{sen}, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são sobrejectivas.

6. Mostre que $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} w \Leftrightarrow z = w + 2k\pi$ ou $z = -w + \pi + 2k\pi$, para algum $k \in \mathbb{Z}$.

7. Calcule o valor principal (i.e., considerando o ramo principal da função $\log z$, ou seja, $\log z = \log|z| + i\theta$, com $\theta \in]-\pi, \pi]$) de:

   a) $\log(-e)$ b) $\log(-i)$ c) $\log(1-i)$ d) 2^{-i} e) $i^{\,i}$ f) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$

8. Determine todas as soluções das seguintes equações:

   a) $e^z = e$ b) $e^z = -1$ c) $\log z = 1 + 2\pi i$ d) $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$

   e) $\operatorname{sen}(z) = 10$ f) $(z^4 - 1)\operatorname{sen}(\pi z) = 0$ g) $\cosh^2 z = 0$ h) $\operatorname{sen}^2(1/z) = 0$

9. Seja $c \in [-1, 1]$. Mostre que $\operatorname{sen} z = c$ se e só se $z \in \mathbb{R}$. Idem para coseno.

10. a) Mostre que para todo o $a \in \mathbb{C} \setminus 0$ e $b \in \mathbb{R}$ se tem $|a^b| = |a|^b$.

b) Em que, em geral, $\log a^b \neq b \log a$, para números complexos $a \neq 0$ e b. Dê exemplos da igualdade não se verificar com o ramo principal do logaritmo e $b \in \mathbb{R}$.

11. Estabeleça a seguinte fórmula

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right).$$

Sugestão: Use a relação $z = \tan w$ e, resolvendo em ordem a e^{iw}, termine obtendo w em função de z.

12. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções:

a) $\overline{z} + iz^2$ b) $i - z^3$ c) $\overline{z}/z$ d) $\operatorname{sen}(z)$ e) $\tan(z)$

13. Esboçe a imagem pela aplicação f do conjunto A indicado:

a) $f(z) = z^2, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{6}\}$

b) $f(z) = z^2, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$

c) $f(z) = e^z, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$

d) $f(z) = \log z$ (ramo principal), $\quad A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < e, \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{7\pi}{4}\}$

e) $f(z) = (z-i)^{-1}, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}$

f) $f(z) = (z-i)^{-1}, \quad A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, z \neq i\}$

14. Use coordenadas polares para determinar a imagem dos seguintes conjuntos através da aplicação $z \to z + \frac{1}{z}$

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.