

Introdução à Análise Complexa

Problemas propostos

Semana 1 - 27 de Setembro a 1 de Outubro de 2021

1. Escreva os seguintes números complexos na forma $a + bi$ e represente-os geometricamente no plano de Argand:

a) $(2 + i)(1 - i)$ b) $\frac{1}{1-i}$ c) $\frac{2+i}{1+i}$ d) $(2 - 3i)^2$
e) $\overline{(1 - 2i)^3}$ f) i^{234} g) $\frac{1}{i} + \frac{3}{1+i}$ h) $(1 + \frac{3}{1+i})^2$

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os geometricamente:

a) 3 b) -2 c) $1 + i$ d) $1 - i$ e) $\sqrt{2}(1 + i)$
f) $\frac{1}{1-i}$ g) $(1 - i)(-1 - i)$ h) $\frac{(1+i)^2(1+\sqrt{3}i)^3}{(1-i)}$

3. Calcule os seguintes números complexos:

a) $\sqrt[3]{8i}$ b) $\sqrt[4]{-1}$ c) $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$ d) $\sqrt{2 + 2\sqrt{3}i}$
e) $\sqrt[4]{(3 - \sqrt{3}i)^6}$ f) $(\sqrt[4]{3 - \sqrt{3}i})^6$

4. Calcule, para $n = 1, 2, 3, \dots$,

a) i^n b) $(\frac{1-i}{1+i})^n$ c) $(1 + i)^n + (1 - i)^n$

5. Esboce no plano complexo o conjunto dos números complexos que satisfazem as relações seguintes:

a) $|z - 2| = 2$ b) $|z + 2i| \geq 2$ c) $|\frac{1}{z-5i}| < 3$
d) $1 < |z - i| < 3$ e) $|z - 3i| = |z + i|$ f) $|z - 1| \geq |z - 1 - i|$
g) $|z - 2| + |z + 2| = 5$ h) $|z - 1| - |z + 1| > 1$ i) $|z| = \operatorname{Re}(z) + 2$
j) $\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) < 1$ k) $\operatorname{Im}(\frac{z+i}{2i}) < 0$ l) $\operatorname{Re}(\frac{z-1}{z-i}) = 0$
m) $|z|^2 > z + \bar{z}$ n) $z^2 + \bar{z}^2 = 1$

6. Determine todas as soluções em \mathbb{C} das seguintes equações:

- a) $z^4 + 16i = 0$
- b) $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$
- c) $1 - z + z^2 = 0$
- d) $z\bar{z} - z + \bar{z} = 0$
- e) $z^4 + z^2 = -1 - i$
- f) $1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$
- g) $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 6i$
- h) $z^6 = (i + 2)^3 + \frac{1-28i}{2-i}$
- i) $1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0$

7. Utilize a fórmula de De Moivre para determinar expressões simplificadas das somas:

- a) $\sum_{k=0}^n \text{sen}((3k+1)x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(4x) + \text{sen}(7x) + \dots + \text{sen}((3n+1)x)$
- b) $\sum_{k=0}^n \text{cos}((3k+1)x) = \text{cos}(x) + \text{cos}(4x) + \text{cos}(7x) + \dots + \text{cos}((3n+1)x)$

8. Determine todos os vértices de um polígono regular de n lados, centrado na origem, sabendo que um deles é representado pelo complexo z_1 .

9. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero.

10. Suponha-se que define um produto em \mathbb{R}^2 que, conjuntamente com a soma vectorial, é compatível com o produto vectorial por escalares (i.e. para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha(\mathbf{x}\mathbf{y}) = (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y})$) e verifica todas as propriedades de corpo (comutatividade, associatividade, distributividade, existência de unidade e inversos). Prove que, necessariamente, existirão então dois vectores linearmente independentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, tais que $\mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\mathbf{w}\mathbf{w} = -\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Conclua que essa estrutura é isomorfa a \mathbb{C} .