Análise Complexa
Notas Sobre as Aulas Teóricas

João Teixeira, Maria João Borges

1º Semestre de 2019/20

Índice

Capítulo 1

Notas Históricas Sobre Números Complexos [1]

A introdução do conceito de número complexo está relacionada com as tentativas de resolução de equações algébricas, que tiveram lugar durante a Idade Média.

No seu compêndio de Álgebra, Al-Khawarizmi (780-850) apresenta a solução de vários tipos de equações quadráticas, que estão de acordo com a "fórmula resolvente" que hoje consta dos programas do ensino secundário, quando restrita a soluções positivas. Sob o califa al-Ma'mun, cujo reinado ocorreu entre os anos 813 e 833, em Bagdad, al-Khawarizmi tornou-se membro da "Casa da Sabedoria" (Dar al-Hikma), uma espécie de academia cujos estudos incidiam sobre a álgebra, geometria e astronomia. Aí foram efectuadas traduções em árabe de obras do período greco-romano, o que salvou algumas delas da destruição.

O compêndio de Al-Khawarizmi é um manual eminentemente prático, em estilo retórico (sem fórmulas) seguindo a tradição babilónia e hindu da resolução de problemas práticos de agrimensura e contabilidade, mas contendo também demonstrações geométricas das soluções dos problemas, inspiradas nos métodos gregos. Al-Khwarizmi enunciou seis casos distintos de equações do segundo e primeiro grau; em notação moderna, temos: (1) $ax^2 = bx$, (2) $ax^2 = c$, (3) $bx = c$, (4) $ax^2 + bx = c$, (5) $ax^2 + c = bx$ e (6) $bx + c = ax^2$. Isto era necessário pois os matemáticos desse tempo não reconheciam coeficientes nulos nem números negativos. Al-Khwarizmi apresentou sistematicamente as soluções de cada um desses problemas algébricos, e que eram conhecidas desde o tempo dos babilónios, mas acrescentou-lhes demonstrações geométricas, inspiradas nos *Elementos* de Euclides. Visto que não considerava números negativos, o seu estudo não levou à introdução de $\sqrt{-1}$, como hoje é feito quando se define esse número como sendo uma das soluções de $x^2 = -1$.

Os métodos da álgebra conhecidos pelos árabes foram difundidos em Itália pela tradução em latim da obra de al-Khawarizmi, feita por Gerard de Cremona (1114-1187). Mas foi o trabalho matemático de Leonardo Pisano (1170-1250), mais conhecido pelo seu pseudónimo, Fibonacci, que mais efectivamente difundiu a notação numérica e a álgebra em uso pelos árabes.

Ao tempo, Pisa era uma importante cidade comercial, que servia de nó a muitas rotas comerciais do Mediterrâneo. Guglielmo Bonacci, o pai de Fibonnaci, era um despachante (ou, segundo outros, um oficial aduaneiro) numa cidade hoje situada na Argélia, de nome Béjaïa, anteriormente conhecida por Bugia ou Bougie, e de onde velas de cera eram exportadas para a Europa. Em França, as velas ainda hoje são denominadas *bougies*. Fibonacci foi assim educado no norte de África, pelos mouros, e mais tarde viajou extensivamente por todo o Mediterrâneo, tendo tido a oportunidade de conhecer muitos mercadores e aprender o sistema de numeração árabe, bem

[1] Esta secção é de leitura facultativa.

como a álgebra. Tornara-se então óbvio o facto de a aritmética e a álgebra elementar serem bastante relevantes para a contabilidade e as finanças.

Nos três séculos seguintes, o trabalho de Fibonnaci dominou quer os aspectos teóricos da álgebra quer as técnicas de resolução de problemas práticos. Com a ascenção da classe mercantil em Itália, particularmente acentuada nos séculos XIV e XV, o ambiente matemático foi bastante influenciado pela expansão do negócio dos *maestri d'abbaco*. Esta maior ênfase comercial gerou grande procura por livros de matemática simplificados, escritos em linguagem comum e muito diferentes dos longos tratados em latim com demonstrações geométricas, que os precederam. No final do século XV, os *maestri d'abbaco* haviam acrescentado muito pouco aos resultados conhecidos no século XII. Mas a atmosfera cultural mais exigente do Renascimento fez os textos regressar paulatinamente à tradição teórica, representada pelos *Elementos* de Euclides e pelo *Libber Abbaci* de Fibbonaci.

Merece especial destaque o livro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, de Luca Pacioli (1445-1517) que, por ser o primeiro texto impresso (e não manuscrito, como anteriormente) de matemática, teve larga difusão e tornou-se popular por condensar num volume toda a matemática conhecida até então. Se é certo que o conteúdo matemático da *Summa* acrescentava pouco ao que já se conhecia, a sua apresentação diferia, de forma substancial, da das suas fontes. Como vimos, as obras dos séculos XIII e XIV tinham um estilo puramente retórico, com todo o conteúdo (excepto os números) descrito em linguagem verbal. Porém, a *Summa* de Paccioli apresenta pela primeira vez os cálculos algébricos em forma abreviada, utilizando os percursores das modernas fórmulas matemáticas.

Com isto, a álgebra inicia nova evolução. As equações do terceiro grau tornam-se alvo de grande interesse, particularmente porque o maior rigor permitiu descobrir vários erros de que padeciam os trabalhos dos *maestri d'abbaco*, e que foram transmitidos acriticamente de geração em geração.

Como sabemos, da equação genérica do 3º grau,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

pode-se ser facilmente obter a equação cúbica reduzida,

$$y^3 + py + q = 0,$$

através da mudança de variável $y = x + \frac{a}{3}$. Scipione del Ferro conseguiu, provavelmente em 1504, resolver um dos casos irredutíveis de coeficientes positivos,

(a) $x^3 + px = q$.

Admitindo apenas $p, q > 0$, os outros dois casos possíveis da equação reduzida (aparentemente não resolvidos por del Ferro) são:

(b) $x^3 = px + q$,

(c) $x^3 + q = px$.

A data exacta da descoberta não se conhece, por causas que em seguida se explicam.

Naquela época, em Itália, o mundo dos matemáticos era extremamente competitivo. Os estudantes pagavam directamente ao professor cada disciplina que frequentavam. Assim, caso ficassem descontentes com o nível ou a qualidade do ensino, podiam suspender sumariamente o pagamento. Um professor que caísse em desgraça podia ser forçado a deixar a escola, ou mesmo a cidade. Para lutar pela sua reputação, assegurando assim a subsistência, os professores participavam em competições públicas em que o vencedor ganhava prestígio e, presumivelmente, um maior número de alunos. O formato destas competições era a de um duelo: o desafiante iniciava a contenda propondo uma lista de problemas a um professor mais famoso, enquanto o desafiado ripostava com uma lista de problemas de dificuldade comparável. Ela declarado vencedor aquele que conseguisse um maior número de respostas correctas. Em tal atmosfera, o guardião de uma nova solução ou técnica de demonstração dispunha de uma vantagem considerável sobre os seus potenciais concorrentes. O segredo era, assim, muito importante, sendo que um matemático nunca sentia grande interesse pela publicação das suas mais importantes descobertas.

Deste modo, a descoberta de del Ferro não foi comunicada à comunidade matemática, pelo que as ideias novas que introduzia (e suscitava) não tiveram impacto imediato. A morte de del Ferro, em 1526, permitiu a um seu discípulo, Fiore, libertar-se da promessa de sigilo que havia contraído. Fiori não perdeu muito tempo e, em 1530, desafiou Tonini da Coi para uma competição. Incapaz de resolver os problemas, Tonini da Coi desafiou por sua vez um seu rival, Niccolò Tartaglia. Nessa ocasião, Tartaglia respondeu que esses problemas eram impossíveis. Mas quando, em 1535, Fiori o desafiou directamente, Tartaglia descobriu sozinho a solução e ganhou mesmo a competição, ao conseguir resolver também a equação reduzida no caso (b).

Uma dificuldade com estas equações, que é visível no caso (b) mas que não aparece no caso (a), é a possibilidade de aparecer a raiz quadrada de um número negativo como resultado intermédio do cálculo de uma solução real positiva. Utilizando notação moderna, a dedução é simples. Substituindo $x = u + v$ em $x^3 = px + q$ obtém-se:

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = p(u+v) + q$$

Fazendo $3uv = p$ na equação acima [2] obtém-se o sistema:

$$u^3 + v^3 = q \quad \text{e} \quad u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Deste sistema resulta uma equação quadrática em u^3, $(u^3)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qu^3$, de cuja solução se obtém:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - w},$$

onde

$$w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

O denominado *casus irreducibilis* ocorre quando o valor sob o símbolo da raiz quadrada, em w, é negativo.

Cardano soube do feito de Tartaglia e pediu-lhe para partilhar a sua descoberta, por forma a que a mesma pudesse ser publicada, com o devido reconhecimento de autoria, no livro que estava a escrever. Tartaglia, incialmente relutante em aceitar o pedido de Cardano, ante a insistência acabou por lhe comunicar a descoberta, no ano de 1539. Em 1545, Cardano publicou finalmente o seu tratado, intitulado *Ars Magna*. Com a meticulosidade que evidencia em questões matemáticas, Cardano indicou del Ferro como primeiro autor e Tartaglia como tendo descoberto o resultado independentemente, o que deu origem a uma das mais intensas controvérsias sobre a prioridade de uma descoberta.

[2] A equação original só tem uma incógnita, portanto podemos adicionar esta relação entre as variáveis u e v, que apenas fixa uma delas como função da outra.

Em *Ars Magna* (1545), Cardano apresenta as soluções de del Ferro e Tartaglia dos vários casos de equações do 3º grau com coeficientes positivos. Isto torna-se possível, em parte, à custa do estabelecimento de identidades algébricas. Porém, permaneciam os métodos de prova de Euclides. Ora, as considerações geométricas necessárias para obter as demonstrações criavam um problema: que significado se devia dar a um número negativo? O que significava um segmento de comprimento negativo, um quadrado de área negativa, ou um cubo de volume negativo? O que significava a diferença $a - b$, quando $a < b$? Ora Euclides, os árabes, Fibonacci, os *maestri d'abaco*, Pacioli, e Cardano contornaram sempre o problema da mesma forma: para não admitirem coeficientes negativos consideraram vários casos para uma mesma equação (da forma que vimos); pois só assim lhes era possível interpretar as equações do segundo grau como problemas geométricos envolvendo comprimentos de segmentos e áreas de polígonos.

Além disso, os números negativos introduziam uma enorme dificuldade quando apareciam sob o símbolo de raiz quadrada. Cardano estava ciente do problema e evitou discutir o *casus irreducibilis* em *Ars Magna*. Para uma equação do 2º grau, ele explica assim a dificuldade [3]: "se $ax = x^2 + b$ então:

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}. \tag{1.1}$$

[...] Se não se pode subtrair b de $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ [no caso em que $(a/2)^2 - b < 0$] então o problema é um falso problema, e a solução que foi proposta não se verifica". Esta impossibilidade apenas significava que a interpretação geométrica da época (requerida pelos métodos de prova disponíveis) invalidava, à partida, os casos que poderiam levar à introdução de $\sqrt{-1}$.

No entanto, no capítulo 37 de *Ars Magna*, Cardano enuncia o problema

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases} \tag{1.2}$$

afirmando depois:

> "É evidente que este caso é impossível. No entanto, procederemos como se segue: dividimos 10 em duas partes iguais, cada uma igual a 5. Estas elevamos ao quadrado, o que dá 25. Subtraia 40 do 25 anteriormente obtido, como eu mostrei no capítulo sobre operações [aritméticas] no livro VI, de onde resulta -15, a raiz quadrada do qual adicionada ou subtraida de 5 dá as soluções do problema. Estas são $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$."

Como o problema (1.2) é equivalente à equação quadrática $x^2 + 40 = 10x$, ele resolveu-o com a fórmula (1.1), o que pode hoje ser considerado como óbvio mas decerto não o era na época. De facto, o uso de propriedades algébricas como meio de demonstração estava ainda na sua infância. Quando calculou $(10/2)^2 - 40 = -15$, ele comentou que "como tal resultado é negativo, o leitor terá que imaginar $\sqrt{-15}$" e concluiu admitindo que "isto é verdadeiramente sofisticado, pois com isto pode-se fazer as operações que não se pode fazer no caso de um número negativo e de outros [números]". Assim, a rejeição das limitações da interpretação geométrica vigente produzia uma nova entidade algébrica cujas propriedades eram bem distintas de tudo o que até então era conhecido, uma entidade cuja interpretação geométrica escapava ao conhecimento da época. Por isso, Cardano viu-se na obrigação de escrever "e assim progride a subtileza da aritmética sendo o desígnio da mesma, como se diz, tão refinado quanto inútil".

Em 1463, o humanista Johannes Müller, mais frequentemente designado pelo pseudónimo Regimontanus, comunicou que havia descoberto "os óptimos livros de Diofanto", o maior algebrista

[3] traduzimos as fórmulas em notação moderna

grego e que viveu em Alexandria provavelmente na segunda metade do século III da nossa era. O livro mais importante que escreveu é a *Aritmética*, onde introduz uma notação simbólica similar à que fora sido desenvolvida até ao século XVI, com símbolos diferentes para uma incógnita, para o quadrado de uma incógnita, para o cubo, etc, e onde resolvia equações e inequações utilizando o que ele designou por fórmulas inderminadas, e que são de facto propriedades algébricas genéricas, hoje descritas através de fórmulas com quantificadores. Até ao Renascimento, a *Aritmética* de Diofanto fora descoberta e traduzida várias vezes, a primeira das quais realizada por al-Karaji, em Bagdad, no século X. Porém, nunca até então a obra tinha conseguido impôr-se aos métodos geométricos de Euclides, largamente difundidos por al-Khwarizmi e, no Ocidente, por Fibonacci.

Considere-se, por exemplo, o seguinte problema do tomo II desse tratado: "Encontrar três números tais que o quadrado de qualquer um deles menos o seguinte dá um quadrado". Usando notação moderna para descrever a solução de Diofanto, ele tomou $x+1$, $2x+1$, e $4x+1$ como os três números pretendidos e verificou que satisfaziam as seguintes condições:

$$(x+1)^2 - (2x+1) = x^2, \tag{1.3}$$

ou seja, um quadrado, e

$$(2x+1)^2 - (4x+1) = 4x^2,$$

também um quadrado, e já agora

$$(4x+1)^2 - (4x+1) = 16x^2,$$

igualmente um quadrado. O facto de este problema ter uma infinidade de soluções permitiu a Diofanto enunciar uma propriedade genérica que os números em questão satisfazem. Em notação moderna, a propriedade escreve-se:

$$\text{Para qualquer } x, (x+1)^2 - (2x+1) = x^2$$

A sua técnica de demonstração usa os métodos algébricos, típicos da análise matemática moderna; além disso, Diofanto não procurou posteriormente qualquer demonstração geométrica da validade do resultado, como era norma.

Durante a segunda metade da década de 1560, Antonio Maria Pazzi descobriu uma cópia manuscrita da *Aritmética* de Diofanto na Biblioteca do Vaticano e mostrou-a a Rafael Bombelli. Convencidos dos seus méritos, os dois homens iniciaram a tradução da obra, tendo completado o trabalho em cinco dos volumes que a constituem. Esta descoberta provocou uma mudança significativa no ambiente matemático. Numa altura em que a vantagem dos métodos geométricos na solução de questões algébricas tinha sido enfraquecida pelas descobertas das soluções das equações do quarto grau e dos números negativos e complexos como soluções dessas equações, a abordagem não geométrica de Diofanto encontrou finalmente um ambiente favorável à sua difusão. Em 1572, quando Bombelli publica uma nova e mais completa edição o seu longo tratado *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica divisa in tre libri*, os termos de inspiração árabe *cosa* (para incógnita) e *census* (para o seu quadrado) são substituídos pelas traduções *tanto* e *potenza* da terminologia diofantina usada para representar número (arithmos, em grego) e potência (dynamis, em grego). Além disso, Bombelli removeu quase todos os problemas práticos originários dos *maestri d'abbaco*, substituindo-os pelos problemas abstractos de Diofanto. Na sua introdução ao tomo III, ele anunciou que havia quebrado com o costume usual de enunciar problemas "... sob o desfarce de acções humanas (compras, vendas, trocas directas, câmbios, juros, desfalques, emissão de moeda, ligas, pesos, sociedades, lucro e prejuízo, jogos e outras inúmeras transacções e operações baseadas na vida diária)". Ele pretendia ensinar "a aritmética [álgebra] avançada, à maneira dos antigos". A variação introduzida pela álgebra de Bombelli, o seu tratamento de problemas cuja solução era impossível pelos métodos geométricos constituia, ao mesmo tempo, o reconhecimento de que a solução dos problemas algébricos não requeria justificação geométrica.

Assim, em "l'Algebra" Bombelli segue Cardano mas oferece uma discussão completa do *casus irreducibilis*, introduzindo a notação $\sqrt{-1}$ nas operações com números complexos. Por exemplo, ele considera a equação

$$x^3 = 15x + 4,$$

para a qual a fórmula de Cardano dá a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Definindo

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1},$$

e elevando ao cubo ambos os membros das igualdades acima, ele conclui facilmente que $a = 2$ e $b = 1$, pelo que a solução

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

apesar de ser real e positiva, só pôde ser obtida por intermédio de números complexos.

René Descartes (1596-1650), que foi essencialmente um filósofo, produziu também importante obra científica. Instado pelos seus amigos a comunicar as suas ideias filosóficas, publicou em 1537 o "*Discours de la méthod pour bien conduire sa raison et chercheur la vérité dans les sciences*". Esta obra tem três apêndices científicos: "*La Dioptrique*, "*Les Météores*" e "*La Géométrie*". Em *La Geometrie*, Descartes introduz ideias que estão na base da moderna geometria analítica. Porém — e infelizmente para a análise complexa — o filósofo considerava os números complexos como uma impossibilidade geométrica. Por exemplo, no método que usou para resolver a equação $x^2 = ax - b^2$, com a e b^2 positivos, Descartes introduz a palavra *imaginário*: "Para qualquer equação podemos imaginar tantas raizes [quanto o seu grau determina], mas em muitos casos não existe a quantidade que correponde à que imaginámos".

John Wallis (1616-1703), na sua "*Algebra*", fez notar que os números negativos — à existência dos quais se havia também colocado objecções filosóficas durante vários séculos – têm uma interpretação física perfeitamente razoável, cuja base era uma recta com uma marca designando o ponto zero e os números positivos sendo aqueles que estão a uma correspondente distância do zero para a direita, enquanto os negativos estão a uma distância correspondente (em valor absoluto) para a esquerda. Assim surgiu o conceito moderno de recta real.

Abraham de Moivre (1667-1754) nasceu em França mas refugiou-se em Londres, aos dezoito anos de idade, segundo se crê por motivos religiosos. Em 1698, mencionou que Newton descobrira, em 1676, um caso particular da fórmula que, em notação moderna, se escreve:

$$\big(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta\big)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta).$$

Abraham de Moivre conhecia este resultado e usou-o varias vezes, mas é devido a Euler o primeiro enunciado explícito do mesmo.

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basileia, na Suiça, mas viveu a maior parte da sua vida em S. Petersburgo e em Berlim. Privou com figuras importantes da história mundial como Frederico II (o Grande) da Prússia e a czarina Catarina (a Grande) da Rússia.

Euler é considerado um dos melhores e mais produtivos matemáticos de todos os tempos. A sua obra tocou tantas áreas distintas que é impossível descrevê-la em poucas linhas. Seguindo a tradição que estivera na base da génese do cálculo diferencial e integral, desenvolveu novas ferramentas matemáticas e aplicou-as a problemas da vida real, ao mesmo tempo que tornou os fundamentos do cálculo mais simples de compreender e de aplicar.

Euler introduziu a notação abreviada $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$; além disso, muita da notação da análise matemática moderna como, por exemplo, a representação de uma função genérica por $f(x)$, a notação actual das funções trigonométricas, o símbolo $\sum$ usado em somatórios e séries, a ele se deve. Euler vizualizava correctamente os números complexos como pontos do plano, da mesma forma que hoje o fazemos, embora não tenha explicitado uma construção dos números complexos baseada nessa ideia. Também introduziu a representação polar, $x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$; descobriu que as soluções da equação $z^n = 1$ são vértices de um polígono regular de n lados; definiu a exponencial complexa a partir de

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Um caso particular desta identidade,

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1,$$

foi considerada por Richard P. Feynman a "fórmula mais notável da matemática", por relacionar de forma simples os três números não racionais, π, e e i, mais conhecidos. O seu estudo da exponencial permitiu-lhe definir logaritmos de números reais negativos, e mostrar que só podiam ser números complexos.

A primeira definição consistente de número complexo é devida ao norueguês Caspar Wessel (1745-1818). Em 1799, Wessel publicou o artigo "On the Analitic Representation of Direction: An Attempt" nas *Memoirs* da Royal Danish Society of Mathematics. Wessel's paper, escrito em dinamarquês, passou despercebido, e a sua importância só foi reconhecida um século depois, em 1897. A abordagem de Wessel recorre a vectores no plano: ele usou a soma de vectores e definiu o produto de forma equivalente ao que hoje fazemos quando somamos os argumentos e multiplicamos os módulos. Independentemente de Wessel, Jean-Robert Argand (1768-1822), um bibliotecário parisiense que se pensa não ter tido educação formal em matemática, mandou imprimir numa gráfica comum, em 1806, uma brochura anónima com o título "Ensaio sobre a Intepretação Geométrica de Quantidades Imaginárias". A. Legendre obteve uma cópia deste texto, que o mencionou numa carta a um irmão de Jacques Français; este último publicou, em 1813, um artigo nos Annales de Mathématiques com a definição básica dos números complexos. No último parágrafo do seu artigo, Jacques reconheceu a importância da carta de Legendre, e pediu ao autor anónimo que se identificasse. Argand tomou conhecimento disto, e a sua resposta encontra-se no número seguinte da revista.

É porém sabido que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) conhecia a representação geométrica dos números complexos desde 1796 mas não a publicou até 1831. Entretanto William Rowan Hamilton (1805-1865), um importante físico e matemático, cujas descobertas mais importantes são a mecânica hamiltoniana e os quaterniões, publicou em 1831 um importante trabalho onde os (mais tarde designados por) números complexos são definidos como pares ordenados de números reais, (a, b). A sua soma foi definida por $(a, b) + (c, b) = (a + b, c + d)$ e o seu produto por $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$. Isto constitui, com efeito, a definição algébrica moderna dos números complexos. Finalmente, em 1831, Gauss decide-se a publicar um artigo onde introduz a designação **número complexo**, Gauss sumariza assim as dificuldades enfrentadas:

> "Se este assunto tem até agora sido tratado de um ponto de vista errado, e logo envolto em mistério e obscurecido, é em grande medida o uso de uma terminologia desadequada que deve ser culpado. Tivessem $+1$, -1 e $\sqrt{-1}$, em vez de sido chamados de unidade positiva, negativa e imaginária (ou, pior ainda, impossível), recebido os nomes, por exemplo, de unidade directa, inversa e lateral, então dificilmente teria existido qualquer contexto para tal obscuridade."

Capítulo 2

Números Complexos

2.1 Estrutura Algébrica

Define-se o conjunto dos *números complexos* como sendo

$$\mathbb{C} = \left\{ z = x + \mathrm{i}y \ \text{tal que} \ x, \ y \in \mathbb{R} \right\}$$

em que $\mathrm{i}^2 = -1$. O número real x é denominado *parte real* do complexo z, $x =$ Re z, e y é denominado *parte imaginária* do complexo z, $y =$ Im z.

Podemos considerar os números reais como sendo os complexos cuja parte imaginária é 0. Por outro lado, os complexos com parte real nula denominam-se *imaginários puros*. De forma simplificada

$$\operatorname{Im} z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R} \quad , \quad \operatorname{Re} z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$$

- **Conjugado de um complexo**:

  Se $z = x + \mathrm{i}y$, define-se o seu conjugado por

  $$\overline{z} = x - \mathrm{i}y \qquad (\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z} \text{ e } \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z})$$

  É óbvio que

  $$\overline{\overline{z}} = z \qquad , \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

- **Igualdade de complexos**:

  Se $z = x + \mathrm{i}y$, $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$

  $$z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a \quad \text{e} \quad y = b$$

  Exemplo:

  1. O 0 (complexo) é o número cujas partes real e imaginária são 0 (real)

     $$z = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = 0$$

  2. $z = \bar{z}$ se e só se Im $z = 0$, ou seja

     $$z = \bar{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \mathbb{R}$$

- **Soma/Produto de complexos e o corpo $\mathbb{C}$:**

  Se $z = x + \mathrm{i}y$, $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$

  $$z + w = (x + a) + \mathrm{i}(y + b) \qquad , \qquad zw = (xa - yb) + \mathrm{i}(xb + ya)$$

  O conjunto $\mathbb{C}$ munido destas operações diz-se um **corpo**, pois verifica:

  ◇ A soma tem as seguintes propriedades:

  * a soma de quaisquer números complexos é também um número complexo (fechado para a soma)
  $$\text{Se } z,\ w \in \mathbb{C} \Rightarrow z + w \in \mathbb{C}$$
  * prorpiedade associativa
  $$z + (w + u) = (z + w) + u = z + w + u$$
  * propriedade comutativa
  $$z + w = w + z$$
  * existência de elemento neutro, 0
  $$z + 0 = z$$
  * existência de inverso aditivo (*simétrico*), representado por $-z$
  $$z + (-z) = 0;$$
  se $z = x + \mathrm{i}y$ então $-z = -x - \mathrm{i}y$.

  ◇ O produto tem as seguintes propriedades:

  * o produto de quaisquer números complexos é também um número complexo (fechado para o produto)
  $$\text{Se } z,\ w \in \mathbb{C} \Rightarrow zw \in \mathbb{C}$$
  * propriedade associativa
  $$z(wu) = (zw)u = zwu$$
  * propriedade comutativa
  $$zw = wz$$
  * existência de elemento neutro, 1
  $$1z = z$$
  * existência de elemento absorvente 0
  $$0z = 0$$
  * todos os complexos diferentes de 0 têm inverso multiplicativo (*inverso*), representado por $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}:
  $$z(\frac{1}{z}) = 1;$$
  se $z = x + \mathrm{i}y$ então $z^{-1} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.

◇ Finalmente, a propriedade distributiva do produto relativamente à soma é válida:

$$z(w+u) = zw + zu$$

- **Simétrico/Diferença de complexos**: Se $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$

  $$-w = -a - \mathrm{i}b \qquad \text{ou seja} \qquad \operatorname{Re}(-w) = -\operatorname{Re} w \ \ , \ \ \operatorname{Im}(-w) = -\operatorname{Im} w$$

  Como consequência da existência de simétrico, podemos definir a subtracção de dois complexos como sendo a soma pelo simétrico, se $z = x + \mathrm{i}y$, $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$

  $$z - w = (x-a) + \mathrm{i}(y-b)$$

- **Inverso/Quociente de complexos**:
  Se $w = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

  $$w^{-1} = \frac{1}{w} == \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2+b^2}$$

  Como consequência da existência de inverso para todo o complexo não nulo, podemos definir o quociente de dois complexos como sendo o produto pelo inverso. Se $z = x + \mathrm{i}y$, $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ e $w \neq 0$

  $$\frac{z}{w} = \frac{(x+\mathrm{i}y)(a-\mathrm{i}b)}{a^2+b^2}$$

É fácil de mostrar que para $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, se tem

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad ; \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

e se além disso $w = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \qquad ; \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \qquad ; \qquad \overline{w^{-1}} = (\overline{w})^{-1} \ (w \neq 0)$$

Os números complexos verificam as mesmas propriedades algébricas dos números reais, que se designam por propriedades de **corpo** [1]. Em particular, a importante **lei do anulamento do produto** é válida:

$$zw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \ \ \vee \ \ w = 0$$

2.1.1 Inexistência de relação de ordem total em $\mathbb{C}$

Uma relação de ordem total (estrita) num conjunto M é uma relação, $<$, que verifica:

(1) Dados $a, b \in M$ então verifica-se uma e só uma das seguintes proposições: $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$. **(tricotomia)**

(2) Dados $a, b, c \in M$ tais que $a < b$ e $b < c$ então $a < c$. **(transitividade)**

Se M for um corpo, a relação diz-se compativel com a soma e o produto se

[1] Note que tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ verificam as propriedades de corpo.

(3) Dados $a, b, c \in M$, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

(4) Dados $a, b, c \in M$, se $a < b$ e $0 < c$ então que $ac < bc$.

Um corpo munido de uma relação de ordem compatível com a sua soma e produto diz-se um corpo ordenado. Os números racionais e os números reais, com a soma, o produto e a relação de ordem usuais, constituem dois bem conhecidos exemplos de corpos ordenados.

Dados quaisquer $a, b \in M$, diz-se que $a > b$ se $b < a$. A partir das propriedades de corpo e dos axiomas de ordem prova-se que se $a < 0$ então $-a > 0$ (basta usar o axioma 3. com $b = 0$ e $c = -a$), de onde resulta que:

(5) Dados $a, b, c \in M$, se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

Isto implica, em particular, que $1 > 0$ (e que $-1 < 0$). [2]

A partir destes resultados prova-se então que não existe qualquer relação de ordem em $\mathbb{C}$ que seja compatível com a soma e o produto (isto é, que satisfaça as propriedades 1-4). Pois supondo que existia, então, pela propriedade tricotómica, ou $\mathrm{i} > 0$ ou $\mathrm{i} < 0$. Mas se $\mathrm{i} > 0$ então $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} * \mathrm{i} > \mathrm{i} * 0 = 0$ (propriedade (4)) o que contradiz $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$. Se $\mathrm{i} < 0$ então $\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} * \mathrm{i} > \mathrm{i} * 0 = 0$ (propriedade (5)) o que também contradiz $\mathrm{i}^2 = -1 < 0$.

2.1.2 Potências de Expoente Inteiro e Polinómios Complexos

Se $n \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{C}$

$$z^n = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots z}_{n \text{ vezes}} & \text{se} \quad n > 0 \\ 1 & \text{se} \quad n = 0 \\ \dfrac{1}{z^{-n}} & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

Como consequência das propriedades comutativa e associativa do produto, verificam-se as propriedades

$$z^n\, w^n = (zw)^n \qquad , \qquad z^n\, z^p = z^{n+p}$$

Podemos então definir um polinómio como sendo

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

em que $a_o,\ a_1,\ ...\ a_n$ são constantes complexas. Mais tarde demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema Fundamental da Álgebra

Se $P(z)$ é um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$ então P admite exactamente n raízes (contando com multiplicidades).

Isto significa, que se P é um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$, existem n complexos z_1, ..., z_n tal que $P(z_k) = 0$ para todo $k = 1, ..., n$ e como tal podemos escrever o polinómio na forma factorizada

$$P(z) = a_n (z - z_1) ... (z - z_n)$$

[2] Note que o que provámos aqui não é auto-evidente: vimos que em **qualquer** corpo ordenado (e não apenas em $\mathbb{R}$) se verifica $1 > 0$, etc.

2.2 Estrutura Geométrica, Representação Polar e Fórmula de Euler

Cada elemento $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, pode ser identificado com o ponto (x, y) do plano $\mathbb{R}^2$.

Na figura (2.1) podemos observar uma representação geométrica de $\mathbb{C}$. Nela, as rectas verticais representam os complexos com a mesma parte real, Re $z = \alpha$, e as rectas horizontais representam os complexos com a mesma parte imaginária, Im $z = \beta$. Assim, cada complexo $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, é unicamente representado pela intersecção de duas rectas Re $z = \alpha$ e Im $z = \beta$.

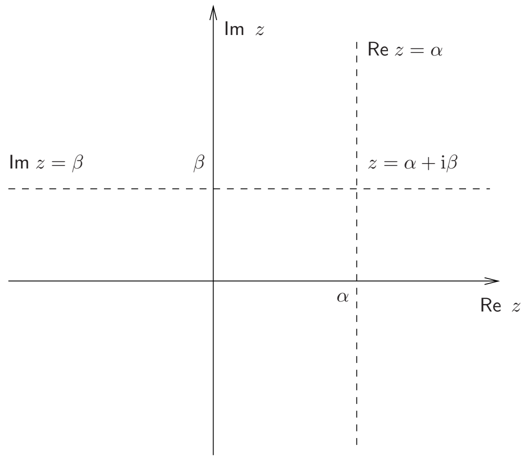

Figura 2.1: O Plano Complexo.

Em particular, Im $z = 0$ é o *eixo real*, Re $z = 0$ é o *eixo imaginário* e a sua intersecção é a origem.

Tal como em $\mathbb{R}^2$, podemos também usar as coordenadas polares para representar um número complexo. Assim, se $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, denomina-se por *módulo* de z, o número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por outro lado se $z \neq 0$, denomina-se por *argumento* de z qualquer número real θ que verifique as igualdades

$$x = |z|\,\cos\theta \qquad \text{e} \qquad y = |z|\,\operatorname{sen}\theta.$$

Isto implica que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

para $x \neq 0$. Desta forma, o complexo z pode ser escrito na *forma polar* por:

$$z = |z|\Big(\cos(\arg z) + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}(\arg z)\Big).$$

Por agora apenas para simplificar a escrita, introduzimos a notação:

$$\cos(\arg z) + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}(\arg z) = e^{\mathrm{i}\arg z}$$

Com esta abreviatura, a representação de um complexo na forma polar reduz-se a $|z|e^{\mathrm{i}\arg z}$. Na figura (2.2) encontra-se a representação geométrica de um complexo em coordenadas polares.

Nestas coordenadas, as semi-rectas com origem em 0 representam os complexos com o mesmo argumento, $\arg z = \theta$, e as circunferências centradas na origem representam os complexos com o mesmo módulo, $|z| = r$. Assim, cada complexo $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, é representado pela intersecção de uma semi-recta com uma circunferência.

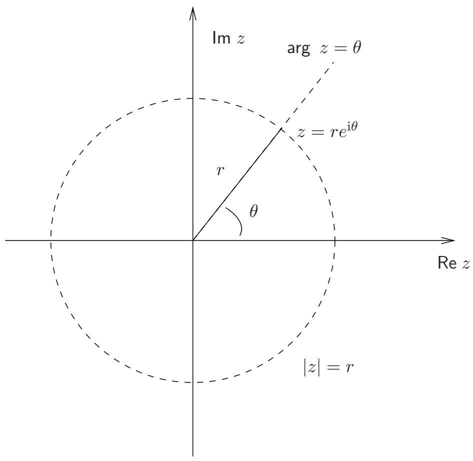

Figura 2.2: Representação polar de um número complexo.

Euler definiu a exponencial de um número imaginário por

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{para qualquer } \theta \in \mathbb{R}.$$

Trata-se da famosa *fórmula de Euler*. Esta definição justifica-se pelo facto de $\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta$ ter as propriedades que se esperam de uma função exponencial. Usando apenas trigonometria, pode-se provar facilmente que para quaisquer $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)} &= e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\varphi} \\ e^{\mathrm{i}\theta}e^{-\mathrm{i}\theta} &= 1 \\ e^{-\mathrm{i}\theta} &= \frac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} \\ e^{\mathrm{i}k\theta} &= \left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^k. \end{aligned}$$

Recorrendo então à fórmula de Euler, a *forma polar* de um número complexo escreve-se, simplesmente:

$$z = |z|\, e^{\mathrm{i}\arg z}. \tag{2.1}$$

Tomando $z = -1$ em (2.1) obtém-se

$$e^{\mathrm{i}\pi} = -1,$$

fórmula também devida a Euler e que relaciona os três números não racionais mais conhecidos da Matemática.

O valor do argumento de um complexo não é único:

se θ verifica a igualdade (2.1) então $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também verifica (2.1).

No entanto é único em cada intervalo de comprimento 2π, isto é, para cada $z \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $\theta \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ ou a $]\alpha, \alpha + 2\pi]$, tal que θ é o argumento de z.

- θ é o **Argumento Principal** se verifica (2.1) e pertence ao intervalo $]-\pi, \pi]$.
- θ é o **Argumento Mínimo Positivo** se verifica (2.1) e pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$.
- Para certo $\alpha \in \mathbb{R}$, θ pertence ao **Ramo α do Argumento** se verifica (2.1) e pertence ao intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$.

Dados $z, w \in \mathbb{C}$, verifica-se que:

$$|z + w| \leq |z| + |w| \;\; (\textbf{desigualdade triangular})$$

Geometricamente a desigualdade triangular é consequência do facto de que num triângulo o comprimento de qualquer dos lados é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Analiticamente, podemos demonstrá-la assim:

$$\begin{array}{rclcl}
|z+w|^2 & = & (z+w)(\overline{z+w}) & = & (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
 & = & z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} & = & |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\
 & = & |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 & \leq & |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\
 & = & |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 & = & (|z| + |w|)^2
\end{array}$$

Como consequência desta desigualdade, tem-se que:

$$\forall\, z,\, w \in \mathbb{C} \qquad |z - w| \geq \Big||z| - |w|\Big|.$$

A partir da representação polar e da fórmula de Euler é fácil de obter algumas propriedades adicionais que melhor especificam a estrutura geométrica do conjunto dos números complexos, e que não se podem obter no espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Assim, se $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ e $w = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$ então:

$$\overline{z} = |z|e^{-\mathrm{i}\theta} \quad , \quad zw = r\,\rho e^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)} \quad , \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}e^{\mathrm{i}(\theta-\varphi)}$$

pelo que

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad , \quad |zw| = |z||w| \quad , \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad , \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \quad , \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$$

2.2.1 Raízes Índice n de um Número Complexo

A partir da expressão do produto de números complexos na forma polar, obtém-se a *fórmula de De Moivre*:

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daqui se deduz que qualquer complexo $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$ não nulo admite n raízes índice n distintas dadas por:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad , \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Para o caso $n = 2$ (raízes quadradas), a expressão anterior é equivalente a:

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}\,e^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{n}} \quad .$$

Para $n \geq 3$, as raízes índice n de um número complexo formam um polígono regular de n lados.

É de notar que algumas propriedades das raízes reais [3] não são satisfeitas pelas raízes complexas, mesmo se interpretadas no sentido da igualdade de conjuntos.

Exemplo:

1. Determinar todos os valores de $\sqrt[4]{-1}$ e $\sqrt{\mathrm{i}}$. Por um lado

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{\mathrm{i}\pi}} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\pi+2k\pi}{4}} \quad , \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \quad ,$$

pelo que as raízes quartas de -1 estão representadas no conjunto

$$R_1 = \left\{ e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \, , \, e^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}} \, , \, e^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{4}} \, , \, e^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{4}} \right\} \quad .$$

Por outro lado

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{e^{\mathrm{i}\pi/2}} = e^{\mathrm{i}\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)} \quad , \quad k = 0,\, 1 \quad ,$$

e assim as raízes quadradas de i estão representadas no conjunto

$$R_2 = \left\{ e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \, , \, e^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{4}} \right\} \quad .$$

É óbvio que $R_2 \subset R_1$ pelo que $\sqrt[4]{-1} \neq \sqrt{\mathrm{i}}$. No entanto, a igualdade verifica-se para 2 das raízes: $e^{\frac{i\pi}{4}}$ e a sua simétrica, $e^{\frac{5i\pi}{4}} = -e^{\frac{i\pi}{4}}$.

[3] Um exemplo de uma propriedade das raízes reais não satisfeita pelas complexas é: se $x \in \mathbb{R}^+$, n, m e $p \in \mathbb{N}$ então:

$$\sqrt[nm]{x^{mp}} = \sqrt[n]{x^p} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$$

.

2. Determinar todos os valores de $\sqrt[4]{(1+\mathrm{i})^2}$ e $\left(\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}\right)^2$. Por um lado

$$\sqrt[4]{(1+\mathrm{i})^2} = \sqrt[4]{2\mathrm{i}} = \sqrt[4]{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}} \quad , \quad k = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \quad ,$$

pelo que os valore possíveis de $\sqrt[4]{(1+i)^2}$ são os elementos do conjunto

$$R_1 = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{8}}\} \quad .$$

Por outro lado

$$\left(\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}\right)^2 = \left(\sqrt[4]{\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\pi/4}}\right)^2 = \left(\sqrt[8]{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}}\right)^2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}}\ ,\ k = 0,\, 1,\, 2,\, 3$$

e assim os valore possíveis de $\left(\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}\right)^2$ estão representados no conjunto

$$R_2 = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{17\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{25\mathrm{i}\pi}{8}}\} = \{\sqrt[4]{2}e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{8}},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{17\mathrm{i}\pi}{8}}\}$$

Mais uma vez se conclui que $R_2 \subset R_1$, pelo que $\sqrt[4]{(1+\mathrm{i})^2} \neq \left(\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}\right)^2$.

3. Determinar todos os valores de $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2}$ e $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^2$. Por um lado

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2} = \sqrt[3]{\left(2e^{-\mathrm{i}\pi/6}\right)^2} = \sqrt[3]{4e^{-\mathrm{i}\pi/3}} = \sqrt[3]{4}\, e^{\mathrm{i}\,\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}} \quad , \quad k = 0,\, 1,\, 2 \quad ,$$

pelo que os valores possíveis de $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2}$ são os elementos do conjunto

$$R_1 = \{\sqrt[3]{4}e^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{9}},\ \sqrt[3]{4}e^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{9}},\ \sqrt[3]{4}e^{\frac{11\pi\mathrm{i}}{9}}\}$$

Por outro lado

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2e^{-\mathrm{i}\pi/6}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}e^{\frac{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}+2k\pi}{3}}\right)^2 = \sqrt[3]{4}e^{\frac{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}+4k\pi}{3}}\ ,\ k = 0,\, 1,\, 2$$

e assim os valore possíveis de $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^2$ estão representados no conjunto

$$R_2 = \{\sqrt[3]{4}e^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{9}},\ \sqrt[3]{4}e^{\frac{11\pi\mathrm{i}}{9}},\ \sqrt[3]{4}e^{\frac{23\pi\mathrm{i}}{9}}\}$$

Verifica-se neste caso que $R_1 = R_2$. Pelo que neste caso se verifica que $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^2$.

De facto podemos enunciar a seguinte propriedade:

Se $z \in \mathbb{C}$, n, p são números naturais primos entre si, então

$$\sqrt[n]{z^p} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^p$$

onde a igualdade deve ser interpretada como igualdade entre conjuntos.

Capítulo 3

Funções Complexas de Variável Complexa

3.1 Definição e Notação

$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se uma função complexa de variável complexa se a todo $z \in D$ fizer corresponder um e um só $w = f(z) \in \mathbb{C}$. Nesse caso

$$D \ni z = x + y\mathrm{i} \quad \longmapsto \quad w = f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \in \mathbb{C}$$

Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ o conjunto em $\mathbb{R}^2$ que "corresponde geometricamente" a $D \subset \mathbb{C}$, isto é:

$$(x,y) \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathrm{i}y \in D$$

As funções $u : \mathcal{D} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $v : \mathcal{D} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são denominadas respectivamente, a *parte real* e a *parte imaginária* de f. O conjunto D é denominado o *domínio* de f. Quando nada se diz acerca de D, subentende-se que:

$$D = \big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ f(z) \text{ está bem definido (em } \mathbb{C}) \big\}$$

e corresponde, em $\mathbb{R}^2$, a:

$$\mathcal{D} = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u(x,y) \text{ e } v(x,y) \text{ estão bem definidos (em } \mathbb{R}) \big\}$$

($\mathcal{D}$ é a intersecção dos domínios de u e v).

Exemplos:

1. Consideremos a função $f(z) = z^2 + 3$. Então

   $$f(x + y\mathrm{i}) = (x + y\mathrm{i})^2 + 3 = x^2 + 2xy\mathrm{i} - y^2 + 3 = x^2 - y^2 + 3 + 2xy\mathrm{i}$$

   Pelo que
   $$\operatorname{Re} f = u(x,y) = x^2 - y^2 + 3 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = v(x,y) = 2xy$$

   É óbvio que o domínio de f é $\mathbb{C}$.

2. A função $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, tem por domínio o conjunto

   $$D = \big\{ z \in \mathbb{C} \ : \ z^2 + 1 \neq 0 \big\} = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$$

3. A função definida por $f(z) = z^2 - 4z + \operatorname{Re} z$ tem domínio $\mathbb{C}$ e

$$f(x + y\mathrm{i}) = (x + y\mathrm{i})^2 - 4(x + y\mathrm{i}) + x = (x^2 - y^2 - 3x) + (2xy - 4y)\mathrm{i}$$

pelo que

$$\operatorname{Re} f = u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = v(x, y) = 2xy - 4y.$$

4. Sendo $n \in \mathbb{N}$, considere-se $f(z) = \sqrt[n]{z}$ (com $-\pi < \arg z \leq \pi$) e escolhendo o valor da raiz de tal forma a que $\sqrt[n]{1} = 1$. Note que se escolhermos apenas uma das n raízes índice n, então obtemos um único valor para $\sqrt[n]{z}$. Desta forma, seja:

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\mathrm{i}\frac{\arg z}{n}} \quad \text{com} \quad \pi < \arg z \leq \pi$$

Trata-se de uma função cujo valor é uma raiz índice n de z e que satisfaz $f(1) = 1$. Além disso, o seu domínio é $\mathbb{C}$ e

$$\operatorname{Re} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cos \frac{\arg z}{n} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{sen} \frac{\arg z}{n}$$

3.2 Funções Elementares

Funções Polinomiais e Racionais

Uma *função polinomial* é definida através de um polinómio complexo:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

onde n é o grau do polinómio e $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$ os seus coeficientes. O domínio das funções polinomiais é $\mathbb{C}$. Tal como no caso real, se z_0 for uma raiz de $P(z)$ então existe $Q(z)$ (de grau $n - 1$) tal que a factorização $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ é válida.

Uma *função racional* é dada por

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinómios. O domínio de $f(z)$ é

$$D = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$$

Admitindo que $P(z)$ e $Q(z)$ não têm raízes comuns, então se z_0 é uma raiz de $Q(z)$ resulta que $|f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \to \infty$ quando $|z - z_0| \to 0$. Este é o exemplo mais simples de uma *singularidade isolada* de uma função complexa, conforme veremos mais tarde.

Exponencial Complexa

Para $z \in \mathbb{C}$, define-se *exponencial complexa* por

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}\Big(\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i} \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\Big)$$

isto é, se $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \big(\cos y + i \operatorname{sen} y \big)$$

A exponencial complexa é uma extensão da exponencial real ao plano complexo. O domínio da exponencial complexa é $\mathbb{C}$, e

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y \quad , \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \operatorname{sen} y \quad , \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \quad , \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z$$

Desta forma podemos observar que as imagens por $f(z) = e^z$ de complexos com parte real constante (rectas verticais) são complexos com módulo constante (circunferências centradas na origem) e a imagem de complexos com parte imaginária constante (rectas horizontais) são complexos com argumento constante (semi-rectas com origem em 0) — ver Figura 3.1.

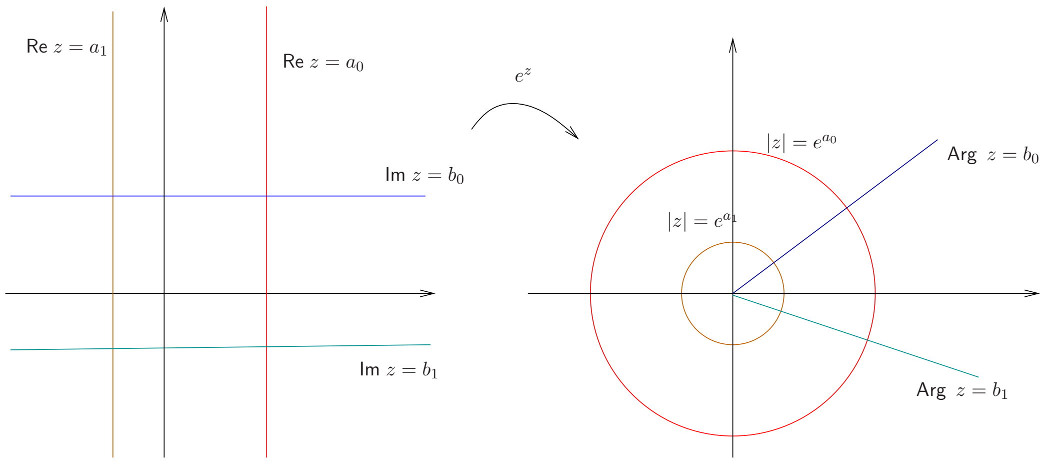

Figura 3.1: Transformação de rectas horizontais e verticais por $f(z) = e^z$.

Propriedades Elementares da Exponencial Complexa

- Para todos z, $w \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

- Para todo $z \in \mathbb{C}$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \qquad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  o que significa que a exponencial complexa é periódica de período $2\pi i$.

- Para qualquer $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a equação $e^z = w$ pode sempre ser resolvida e tem uma infinidade de soluções, que são dadas por:

$$e^z = w \quad \Leftrightarrow \quad z = \log |w| + i(\arg w + 2k\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

  (porquê?)

Funções Trigonométricas

A partir da fórmula de Euler tem-se, para qualquer $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}y} &= \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y \\ e^{-\mathrm{i}y} &= \cos y - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y \end{aligned}$$

Somando e subtraindo as identidades anteriores obtém-se, respectivamente, $\cos y = \frac{1}{2}\big(e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y}\big)$ e $\mathrm{sen}\, y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y}\big)$.

Podemos então generalizar as funções trigonométricas reais a funções complexas de variável complexa, definindo-as, para todo o $z \in \mathbb{C}$, por:

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad , \quad \mathrm{sen}\, z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \quad , \quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\mathrm{sen}\, z}{\cos z} \quad , \quad \mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\mathrm{sen}\, z}$$

É óbvio que as funções $\mathrm{sen}\, z$ e $\cos z$ têm domínio $\mathbb{C}$, enquanto que o domínio da função $\mathrm{tg}\, z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \cos z = 0\}$ e o domínio da função $\mathrm{cotg}\, z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \mathrm{sen}\, z = 0\}$.

As propriedades das funções trigonométricas complexas são análogas às das funções trigonométricas reais, e podem ser facilmente justificadas a partir das suas definições. Em particular, para quaisquer $z,\ w \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$:

- $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\mathrm{sen}(z + 2k\pi) = \mathrm{sen}\, z$ e $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$
- $\mathrm{tg}(z + k\pi) = \mathrm{tg}\, z$
- $\mathrm{cotg}(z + k\pi) = \mathrm{cotg}\, z$.
- $\mathrm{sen}(z \pm w) = \mathrm{sen}\, z\ \cos w \pm \mathrm{sen}\, w\ \cos z$
- $\cos(z \pm w) = \cos z\ \cos w \mp \mathrm{sen}\, z\ \mathrm{sen}\, w$
- $\mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}\, z$
- $\cos(-z) = \cos z$.

O contadomínio das funções $\mathrm{sen}\, z$ e $\cos z$ é $\mathbb{C}$. Isto significa que quando as funções reais seno e coseno são estendidas ao plano complexo, tanto as equações $\cos z = w$ como $\mathrm{sen}\, z = w$ passam a ter solução **para qualquer** $w \in \mathbb{C}$. Por periodicidade, essas equações têm uma infinidade de soluções — pois se $\bar{z}$ é solução de $\cos z = w$ ou $\mathrm{sen}\, z = w$, então $\hat{z} + 2k\pi$ também o é, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. Chama-se a atenção que este facto implica, entre outras coisas, que as funções $\mathrm{sen}\, z$ e $\cos z$ **não são limitadas** em $\mathbb{C}$.

Funções Hipérbólicas

Para $z \in \mathbb{C}$ definem-se:

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \quad , \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \quad , \quad \mathrm{tgh}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z} \quad , \quad \mathrm{cotgh}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

É óbvio que as funções $\mathrm{sh}\, z$ e $\mathrm{ch}\, z$ têm domínio $\mathbb{C}$, enquanto que o domínio da função $\mathrm{tgh}\, z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \mathrm{ch}\, z = 0\}$ e o domínio da função $\mathrm{cotgh}\, z$ é $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, \mathrm{sh}\, z = 0\}$.

Todas as igualdades verificadas pelas funções hiperbólicas reais são tambem verificadas pelas funções hiperbólicas complexas. Em particular, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{Z}$

- $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\operatorname{sh}(z + 2k\pi \mathrm{i}) = \operatorname{sh} z$
- $\operatorname{ch}(z + 2k\pi \mathrm{i}) = \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{sh}(z \pm w) = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} w \pm \operatorname{sh} w \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{ch}(z \pm w) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} w \pm \operatorname{sh} z \operatorname{sh} w$
- $\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z$ e $\operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z$.

Logaritmo Complexo

Define-se *logaritmo complexo* por

$$w = \mathsf{Log}\, z \qquad \Leftrightarrow \qquad e^w = z \qquad \Leftrightarrow \qquad w = \log|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Observa-se que o logaritmo complexo está bem definido em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Atendendo a que os argumentos de z formam um conjunto infinito, da forma $\{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, em que $\theta \in \mathbb{R}$ é um argumento particular de z, então também Log z terá uma infinidade de valores. Como tal, Log designa aquilo que em análise complexa se chama uma *função multivalente*.

De forma a definir funções *logaritmo complexo*, $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ (que tomam um único valor, $\log z \in \mathbb{C}$) há que restringir o valor do argumento a um intervalo de comprimento 2π, intervalo esse onde o argumento de z é único. Sendo assim, para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se o *ramo* α do logaritmo (resp. o *valor* α do logaritmo) por:

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i} \arg z \quad , \quad \arg z \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$$

(Resp., $\arg z \in]\alpha, \alpha + 2\pi]$ para o valor α de $\log$). O caso particular em que se considera o argumento principal, isto é

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i} \arg z \quad , \quad \arg z \in]-\pi, \pi]$$

denomina-se *valor principal do logaritmo*.

Os ramos do logaritmo verificam algumas propriedades algébricas da função logaritmo real apenas a menos de múltiplos de $2\pi\mathrm{i}$. Mais rigorosamente, isto significa que para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$ e $m \in \mathbb{Z}$:

- $\log(zw) = \log z + \log w + 2p\pi\mathrm{i}$ para certo $p \in \mathbb{Z}$.
- $\log(z/w) = \log z - \log w + 2p\pi\mathrm{i}$ para certo $p \in \mathbb{Z}$.
- $\log(z^m) = m \log z + 2p\pi\mathrm{i}$ para certo $p \in \mathbb{Z}$.

Exemplos:

1. Determinar o valor principal de $\log(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})+\log(-1-\mathrm{i})$ e de $\log\Big[(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})\Big]$.
   Por um lado
$$\begin{aligned}\log\Big[(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})\Big] &= \log\Big[(4e^{-\mathrm{i}\pi/6})(\sqrt{2}e^{5\pi\mathrm{i}/4})\Big]\\ &= \log\Big[(4\sqrt{2}e^{13\,\mathrm{i}\pi/12})\Big]=\log\Big[(4\sqrt{2}e^{-11\,\mathrm{i}\pi/12})\Big]\\ &= \frac{5}{2}\log 2-\frac{11\pi\,\mathrm{i}}{12}\end{aligned}$$
   Por outro lado
$$\begin{aligned}\log(2\sqrt{3}-2i)+\log(-1-\mathrm{i}) &= \log(4e^{-\mathrm{i}\pi/6})+\log(\sqrt{2}e^{-3\pi\mathrm{i}/4})\\ &= \log 4-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}+\log\sqrt{2}-\frac{3\mathrm{i}\pi}{4}=\frac{5}{2}\log 2-\frac{11\pi\,i}{12}\end{aligned}$$
   Neste exemplo *em particular*, verifica-se que para o valor principal do logaritmo:
$$\log(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})+\log(-1-\mathrm{i})=\log\Big[(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})\Big]$$

2. Determinar o valor principal de $\log\Big[(-\sqrt{3}-3\mathrm{i})^5\Big]$ e de $5\log(-\sqrt{3}-3\mathrm{i})$. Por um lado
$$\begin{aligned}\log\Big[(-\sqrt{3}-3\mathrm{i})^5\Big] &= \log\Big[(\sqrt{12}e^{4\pi\mathrm{i}/3}))^5\Big] = \log\Big[(\sqrt{12})^5e^{20\pi\mathrm{i}/3})\Big]\\ &= \log\Big[(\sqrt{12})^5e^{2\pi\mathrm{i}/3})\Big] = \frac{5}{2}\log(12)+\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}\end{aligned}$$
   Por outro lado
$$5\log(-\sqrt{3}-3\mathrm{i})=5\,\log\Big(\sqrt{12}e^{-2\pi\mathrm{i}/3}\Big)=\frac{5}{2}\log(12)-\frac{10\pi\mathrm{i}}{3}$$
   Verifica-se, neste exemplo, que para o valor principal do logaritmo
$$\log\Big[(-\sqrt{3}-3\mathrm{i})^5\Big]=5\,\log(-\sqrt{3}-3\mathrm{i})+4\pi\mathrm{i}$$

Potência de Expoente Complexo

Para $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $w\in\mathbb{C}$ fixo, define-se ramo-α da potência de expoente w por:
$$z^w=e^{w\log z}\qquad,\qquad \arg z\in[\alpha,\alpha+2\pi[$$
O caso especial em que se considera o valor principal do logaritmo, isto é
$$z^w=e^{w\log z}\quad,\quad \arg z\in]-\pi,\pi]$$
denomina-se valor principal da potência de expoente w.

Como exemplo, calculemos o valor principal de i^w, onde w é um número complexo de módulo 1 ou seja, $w=e^{\mathrm{i}\theta}$, para certo $\theta\in]-\pi,\pi[$. Temos:
$$w^{\mathrm{i}}=e^{\mathrm{i}\,\log w}=e^{\mathrm{i}\,\log\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)}=e^{\mathrm{i}(\log 1+\mathrm{i}\theta)}=e^{\mathrm{i}^2\theta}=e^{-\theta}.$$
Se quiséssemos determinar o valor multivalente de w^{i}, então teríamos que considerar todos os possíveis valores do argumento de w, que são $\theta+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. Neste caso, o resultado é:
$$\Big\{e^{-\theta-2k\pi}:k\in\mathbb{Z}\Big\}=\Big\{e^{-\theta+2j\pi}:j\in\mathbb{Z}\Big\}$$

3.3 Limites

Sendo $f : D \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$, define-se

$$L = \lim_{z \to z} f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ |z - z_0| < \delta \ \ \Rightarrow \ \ |f(z) - L| < \epsilon$$

Proposição
Se $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ e $L = A + \mathrm{i}B$ então:

$$L = \lim_{z \to z_0} f(z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = A \\ \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = B \end{cases}$$

Em consequência, é válida a seguinte igualdade:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + \mathrm{i} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y)$$

(admitindo que os limites existem).

Demonstração:
Em primeiro lugar, assumindo que existem os limites

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = A \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = B$$

Por definição, para cada $\epsilon > 0$ existem números positivos δ_1 e δ_2 tais que

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |u(x, y) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |v(x, y) - B| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considere-se $\delta = \min\{\delta_1 \ , \ \delta_2\}$ Tem-se então que se $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta$

$$\begin{aligned} \big|u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) - (A + \mathrm{i}B)\big| &= \Big|u(x, y) - A + \mathrm{i}\Big(v(x, y) - B\Big)\Big| \\ &\le \big|u(x, y) - A\big| + \big|v(x, y) - B\big| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

o que demonstra que o limite $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + \mathrm{i}B$.

Reciprocamente, supondo que existe $\lim_{z \to z_0} f(z) = A + \mathrm{i}B$, dados $\epsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que se $\big|(x + \mathrm{i}y) - (x_0 + \mathrm{i}y_0)\big| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ então:

$$\big|u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) - (A + \mathrm{i}B)\big| = \sqrt{(u(x, y) - A)^2 + (v(x, y) - B)^2} < \epsilon$$

Suponhamos que $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$; então:

$$|u(x,y)-A| \leq \sqrt{(u(x,y)-A)^2+(v(x,y)-B)^2} < \epsilon$$

e

$$|v(x,y)-B| \leq \sqrt{(u(x,y)-A)^2+(v(x,y)-B)^2} < \epsilon.$$

□

Do resultado anterior e dos teoremas correspondentes da análise real, deduzimos o seguinte:

Proposição:
Se existirem $\lim_{z\to z_0} f(z)$ e $\lim_{z\to z_0} g(z)$, tem-se que:

$\lim_{z\to z_0}(f\pm g)(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z)$;

$\lim_{z\to z_0}(fg)(z) = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z)$;

$\lim_{z\to z_0}(f/g)(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)/\lim_{z\to z_0} g(z)$,

sendo esta última propriedade válida desde que $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.

Exemplo:

1. $\lim_{z\to \mathrm{i}} e^{\pi z} = -1$.

2. $\lim_{z\to 1} \dfrac{z^2-(\mathrm{i}+1)z+\mathrm{i}}{z^2+(\mathrm{i}-1)z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to 1} \dfrac{(z-\mathrm{i})(z-1)}{(z+\mathrm{i})(z-1)} = \lim_{z\to 1} \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$

É de observar que enquanto o cálculo algébrico de limites em $\mathbb{C}$ é semelhante ao de $\mathbb{R}$, a noção de limite em $\mathbb{C}$ é idêntica à de $\mathbb{R}^2$ [1].

Exemplo:

Observa-se que $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ representa uma indeterminação do tipo 0/0. Escrevendo $z=|z|e^{\mathrm{i}\theta}$ obtém-se

$$\frac{\operatorname{Re} z}{z} = \frac{|z|\cos\theta}{|z|e^{i\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}\cos\theta$$

Fazendo $|z| \to 0$ verifica-se Re $(z)/z$ converge para um valor que depende de θ (ou seja do argumento de z) e como tal o seu valor dependerá da forma como z está a convergir para 0. Assim, por exemplo, se z está a convergir para 0 ao longo do semi-eixo real positivo ($\theta = 0$) tem-se

$$\lim_{z\to 0\,,\, z\in\mathbb{R}^+} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = 1 \ ,$$

enquanto que se z está a convergir para 0 ao longo do semi-eixo imaginário positivo ($\theta = \pi/2$) tem-se

$$\lim_{z\to 0\,,\, z\in\mathrm{i}\mathbb{R}^+} \frac{\operatorname{Re} z}{z} = 0 \ .$$

Conclui-se que $\lim_{z\to 0} \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$ não existe.

[1] As vizinhanças de um ponto em $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ são discos centrados nesse ponto; ou seja, as vizinhanças em $\mathbb{C}$ e em $\mathbb{R}^2$ são topologicamente idênticas.

3.4 Continuidade

Sendo $f : D \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in D$, diz-se que f é *contínua* em z_0 se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Se f é contínua em todos $z_0 \in D$ diz-se que f é *contínua* em D. Demonstra-se que, se $f = u + \mathrm{i}v$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ então f é contínua em z_0 se e só se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0).

Sendo assim, se f e g são contínuas em z_0 então $f + g$, $f - g$, fg e no caso de $g(z_0) \neq 0$, $\frac{f(z)}{g(z)}$ são contínuas em z_0. Se g é contínua em z_0 e f é contínua em $g(z_0)$ então $f \circ g$ é contínua em z_0.

Estudo da Continuidade das Funções Elementares

1. A função $f(z) = z = x + \mathrm{i}y$ é contínua em $\mathbb{C}$, dado que $\operatorname{Re} f(z) = x$ e $\operatorname{Im} f(z) = y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f(z) = z^n$ é contínua em $\mathbb{C}$, dado que é o produto de funções contínuas em $\mathbb{C}$.

3. Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{C}$ dado que se obtém a partir da soma e produto de funções contínuas em $\mathbb{C}$.

4. Uma função racional $P(z)/Q(z)$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}$.

5. A função exponencial $f(z) = e^z$ é contínua em $\mathbb{C}$, dado que $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$ e $\operatorname{Im} f(z) = e^x \operatorname{sen} y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

6. As funções $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ $\operatorname{ch} z$ e $\operatorname{sh} z$ são contínuas em $\mathbb{C}$ (obtidas por composição e soma de funções contínuas em $\mathbb{C}$).

7. Considere-se a função valor principal do $\log z$, isto é,

   $$\log z = \log |z| + \mathrm{i} \ \arg z \qquad , \qquad \arg z \in \,]-\pi, \pi]$$

   Por um lado, $\operatorname{Re} \log z = \log |z|$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (consequência da continuidade da função logaritmo real em $\mathbb{R}^+$. Por outro lado, $\operatorname{Im} \log z = \arg z$ é contínua para todos os z tais que $\arg z \in \,]-\pi, \pi[$ (pois a função $\arg(x + \mathrm{i}y)$ é contínua no interior de cada num dos seus ramos). Falta então estudar a continuidade do valor principal do $\log z$ em qualquer ponto z tal que arg $z = \pi$. Para isso, considere-se $z_0 \neq 0$ tal que arg $z_0 = \pi$. Então

   $$\lim_{z \to z_0} \arg z = \begin{cases} \pi & \text{se} \quad \operatorname{Im} z > 0 \\ -\pi & \text{se} \quad \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

   Conclui-se que não existe $\lim\limits_{z \to z_0} \arg z$ para qualquer $z_0 \neq 0$ com $\arg z_0 = \pi$ (pelo que a função $\arg z$ não é contínua nestes pontos). Consequentemente o domínio de continuidade do valor principal de $\log z$ é

   $$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi\} = \mathbb{C} \setminus \{x e^{\mathrm{i}\pi} : x \in \mathbb{R}_0^+\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$$

   O conjunto

   $$\{x e^{\mathrm{i}\pi} : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

   é denominado *corte do valor principal do logaritmo* (complexo).

8. De modo análogo se mostra que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o domínio de continuidade do ramo α do logaritmo
$$\log z = \log |z| + \mathrm{i} \arg z \qquad , \qquad \arg z \in \,]\alpha, \alpha + 2\pi]$$
é
$$\mathbb{C} \setminus \{z = xe^{\mathrm{i}\alpha} : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$
O conjunto
$$\{z = xe^{\mathrm{i}\alpha} : x \in \mathbb{R}_0^+\}$$
é denominado *corte do ramo α do logaritmo* (complexo).

Capítulo 4

Derivada Complexa e Funções Analíticas

4.1 Derivada Complexa

Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tem *derivada complexa* (ou que é diferenciável no sentido de $\mathbb{C}$) em $z_0 \in D$ se existe

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Se o limite existir, define-se

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Define-se *Domínio de Diferenciabilidade* como sendo o conjunto de pontos do domínio de f para os quais existe derivada.

Exemplos:

1. Para $f(z) = 2z - z^2$, de domínio $\mathbb{C}$, verifica-se que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{2(z+h) - (z+h)^2 - (2z - z^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \Big(2 - 2z - h \Big) = 2 - 2z \end{aligned}$$

Conclui-se que f é diferenciável em $\mathbb{C}$ e

$$f'(z) = 2 - 2z \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. Para $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = 2x + 3\mathrm{i}y$, de domínio $\mathbb{C}$, verifica-se que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h_1 + ih_2 \to 0} \frac{2(x + h_1) + 3\mathrm{i}(y + h_2) - (2x + 3\mathrm{i}y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h_1 + 3\mathrm{i}h_2}{h_1 + \mathrm{i}h_2} \end{aligned}$$

Observe-se que

- se $h_1 + \mathrm{i}h_2 \to 0$ ao longo do eixo real, ter-se-á que $h_2 = 0$ e o valor do limite (direccional) é
$$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h_1\to 0} \frac{2h_1}{h_1} = 2$$
- se $h_1 + \mathrm{i}h_2 \to 0$ ao longo do eixo imaginário, ter-se-á que $h_1 = 0$ e o valor do limite (direccional) é
$$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathrm{i}\mathbb{R}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h_2\to 0} \frac{3\mathrm{i}h_2}{\mathrm{i}h_2} = 3$$

pelo que este limite não existe. Conclui-se que para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ não existe e como tal o domínio de diferenciabilidade de f é o conjunto vazio.

3. Para $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$, de domínio $\mathbb{C}$, verifica-se que
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)\,\mathrm{Re}(z+h) - z\,\mathrm{Re}\,z}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z\,\mathrm{Re}\,h + h\,\mathrm{Re}\,z + h\,\mathrm{Re}\,h}{h} \\
&= \mathrm{Re}\,z + \lim_{h\to 0}(z+h) \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}\,h}{h} \\
&= \mathrm{Re}\,z + z \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}\,h}{h}
\end{aligned}$$
Observe-se que, escrevendo o número complexo h na forma polar, se tem
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{Re}\,h}{h} = \lim_{|h|\to 0} \frac{|h|\cos\theta}{|h|e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{\mathrm{i}\theta}\cos\theta$$
pelo que este limite não existe. Se $z = 0$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$$
e como tal f é diferenciável em 0 e $f'(0) = 0$. Por outro lado se $z \neq 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ não existe (**porquê?**) pelo que a função não é diferenciaável em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Assim, o domínio de diferenciabilidade de f é $\{0\}$.

Nota: Os casos anteriores (**2** e **3**), mostram que não é suficiente que u e v sejam diferenciáveis em (x_0, y_0) para que $f = u + \mathrm{i}v$ tenha derivada em $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Por exemplo para $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = 2x + 3\mathrm{i}y$
$$\mathrm{Re}\,f = u(x,y) = 2x \qquad , \qquad \mathrm{Im}\,f = v(x,y) = 3y$$
admitem derivada (no sentido de $\mathbb{R}^2$) em todos os pontos, e no entanto a função $f = u + \mathrm{i}v$ não admite derivada (no sentido de $\mathbb{C}$) em ponto algum de $\mathbb{C}$.

Tal como para as funções reais de variável real, é válido o seguinte resultado, com demonstração análoga ao caso real.

Proposição Se a função $f : D \to \mathbb{C}$ é diferenciável em z_0 então f é contínua em z_0.

Notemos que, tal como no cálculo real, o recíproco não pode não ser verdade: existem funções contínuas num determinado ponto do seu domínio que não têm derivada nesse ponto (casos **2** e **3** do exemplo anterior. É no entanto muitas vezes utilizado na forma de contra-recíproco: se f não é contínua em z_0 então f não é diferenciável em z_0.

Exemplo:
O valor principal do logaritmo complexo não admite derivada no conjunto

$$\{z = re^{i\pi} \ : \ r \geq 0\}$$

Para facilitar a notação, definimos o disco centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$ e de raio $\epsilon > 0$ como sendo o subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por:

$$D(z_0, \epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\big\}.$$ [1]

A análise complexa estuda essencialmente as funções complexas de variável complexa que são diferenciáveis em alguma região aberta do seu domínio.

Definição: (Função Analítica ou Holomorfa)

Uma função diz-se *analítica* ou *holomorfa* em z_0 se

> Existe um disco centrado em z_0 tal que f admite derivada em todos os pontos desse disco, ou seja, existe $\epsilon > 0$ tal que f admite derivada em todos os pontos de $D(z_0, \epsilon)$.

Define-se *domínio de analiticidade* ou *domínio de holomorfia* ao maior conjunto onde f é analítica. Uma função cujo domínio de analiticidade é $\mathbb{C}$ diz-se *inteira*. Observe-se que o domínio de analiticidade está sempre contido no domínio de diferenciabilidade.

Exemplos:

1. Para $f(z) = 2z - z^2$ vimos que o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{C}$, pelo que o domínio de analiticidade é tambem $\mathbb{C}$. Esta função constitui um exemplo de função inteira.

2. Para $f(z) = f(x + iy) = 2x + 3iy$ vimos que que o domínio de diferenciabilidade é o conjunto vazio, pelo que o domínio de analiticidade é tambem o conjunto vazio.

3. Para $f(z) = z \operatorname{Re} z$ vimos que o domínio de diferenciabilidade é $\{0\}$, pelo que o domínio de analiticidade é o conjunto vazio.

Nota: O domínio de analiticidade de uma função é sempre um conjunto aberto. Um conjunto $D \subset \mathbb{C}$ é aberto se para qualquer $z \in D$ existe pelo menos um disco centrado em z que está contido em D.

[1] Ao disco $D(z_0, \epsilon)$, em $\mathbb{C}$, corresponde em $\mathbb{R}^2$ a bola, $B_\epsilon(z_0)$, centrada em z_0 e de raio ϵ.

4.2 Equações de Cauchy-Riemann

4.2.1 Condição Necessária de Diferenciabilidade

Considere-se a função complexa $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ e um ponto $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ pertencente ao domínio de f. Vamos estudar qual (ou quais) as propriedades de uma função complexa que admite derivada num ponto.

- **Condição necessária à existência de derivada**

Se f admite derivada em $z = x + \mathrm{i}y$ então são verificadas as *equações de Cauchy-Riemann* em (x, y), isto é,

$$\text{se } f'(z) \text{ existe então } \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

No caso de existir derivada em z, tem-se que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

Demonstração: Sabendo, por hipótese, que existe o limite que define a derivada complexa,

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}, \tag{4.2}$$

então calculando esse limite segundo as direcções do eixo real (fazendo $w = t \to 0$) e do eixo imaginário (fazendo $w = \mathrm{i}t$ e $t \to 0$), obtêm-se os limites:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(x+\mathrm{i}y+t) - f(x+\mathrm{i}y)}{t} &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{u(x+t,y) - u(x,y)}{t} + \mathrm{i}\,\frac{v(x+t,y) - v(x,y)}{t} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \lim_{t\to 0} \frac{f(x+\mathrm{i}y+\mathrm{i}t) - f(x+\mathrm{i}y)}{\mathrm{i}t} &= \lim_{t\to 0} \left[\frac{u(x,y+t) - u(x,y)}{\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\,\frac{v(x,y+t) - v(x,y)}{\mathrm{i}t} \right] \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Resulta assim que os dois limites em (4.3) são iguais ao limite em (4.2), ou seja,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y},$$

de onde resultam imediatamente as *equações de Cauchy-Riemann* (4.1). □

É de salientar que as condições de Cauchy-Riemann não são suficientes para a existência de derivada num ponto. Estudemos então, com mais detalhe, a questão da aplicabilidade deste resultado.

- **(Contra-Recíproco)** Se as condições de Cauchy-Riemann não se verificam em (x, y) então $f'(x + \mathrm{i}y)$ não existe.

  Exemplo:

  Para a função $f(z) = z + \operatorname{Re} z$ tem-se que

  $$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) = 2x \qquad , \qquad \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = v(x, y) = y$$

  pelo que

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(x.y) = 2 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(x.y) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(x.y) = 1 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(x.y) = 0$$

  É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann não se verificam em qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podemos concluir que $f(z) = z + \operatorname{Re} z$ não admite derivada em qualquer $z \in \mathbb{C}$.

- Se as condições de Cauchy-Riemann se verificam em (x_0, y_0) então **nada se pode concluir** sobre a existência de $f'(x_0 + \mathrm{i}y_0)$.

  Exemplos:

  a) Para a função definida em $\mathbb{C}$ por

  $$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1 + \mathrm{i}) - y^3(1 - \mathrm{i})}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

  tem-se que

  $$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

  e

  $$\operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = v(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

  Então

  $$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0, h) - u(0, 0)}{h} = -1$$

  e

  $$\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(h, 0) - v(0, 0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{v(0, h) - v(0, 0)}{h} = 1$$

pelo que é óbvio que se verificam as condições de Cauchy-Riemann no ponto $(0,0)$. Por outro lado, e escrevendo o incremento $\Delta z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, tem-se que se existir, $f'(0)$ verifica:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \cos^3\theta(1+\mathrm{i}) - \rho^3 \operatorname{sen}^3\theta(1-\mathrm{i})}{\rho^3 e^{\mathrm{i}\theta}} \\ &= \frac{\cos^3\theta(1+\mathrm{i}) - \operatorname{sen}^3\theta(1-\mathrm{i})}{e^{\mathrm{i}\theta}} \end{aligned}$$

Dado que o resultado do cálculo do limite depende do argumento de Δz, conclui-se que $f'(0)$ não existe.

b) Para a função $f(z) = 2z - z^2$, tem-se que

$$\operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) = 2x - x^2 + y^2 \qquad , \qquad \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y) = v(x,y) = 2y - 2xy$$

pelo que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x.y) = 2 - 2x \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(x.y) = 2y \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(x.y) = -2y \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(x.y) = 2 - 2x \ ,$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann são válidas para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vimos na secção anterior que a sua derivada, $f'(z)$, existe para todo $z \in \mathbb{C}$. Este é um exemplo de uma função que verifica as condições de Cauchy-Riemann e que tem derivada complexa (em $\mathbb{C}$).

4.2.2 Teorema de Cauchy-Riemann

O seguinte teorema fornece uma condição suficiente para a existência de derivada complexa.

Teorema de Cauchy-Riemann

Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função complexa de variável complexa, dada por $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ num conjunto aberto D e $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. Se as funções u e v são contínuas, têm derivadas parciais contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann no ponto (x_0, y_0),

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \ , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \ ,$$

então a derivada $f'(z_0)$ existe (ou seja, f é diferenciável em z_0 no sentido complexo) e

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0.y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Exemplos:

a) Para a função $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = e^y \cos x - \mathrm{i}e^y \operatorname{sen} x$ tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -e^y \operatorname{sen} x \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = e^y \cos x \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -e^y \cos x \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -e^y \operatorname{sen} x$$

Verifica-se facilmente que:

(A) As funções u e v e as suas derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^2$;

(B) as condições de Cauchy-Riemann são válidas em $\mathbb{R}^2$.

Por (A) e (B), o Teorema de Cauchy-Riemann permite-nos concluir que f é diferenciável em $\mathbb{C}$, e para todo $z \in \mathbb{C}$

$$f'(x+\mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -e^y \operatorname{sen} x - ie^y \cos x$$

Note que $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = e^y e^{-\mathrm{i}x} = e^{-\mathrm{i}(x+iy)} = e^{-\mathrm{i}z}$ e $f'(z) = -\mathrm{i}f(z) = -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}z}$.

b) Para a função $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) = x^3 + \mathrm{i}(y-1)^3$ tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \ , \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 3(y-1)^2$$

(A) as funções u e v e as suas derivadas parciais são contínuas em $\mathbb{R}^2$;

(B) as condições de Cauchy-Riemann são válidas sse $x^2 = (y-1)^2$, isto é para os pontos do plano, (x,y) pertencentes a pelo menos uma das rectas de equação $x = y-1$ ou $x = 1-y$.

Podemos então concluir que, dado $z \in \mathbb{C}$:

- se $z \notin \{x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \ x = y-1\} \cup \{x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \ x = 1-y\}$, por (B) não existe $f'(z)$;
- se $z \in \{x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \ x = y-1\} \cup \{x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} : \ x = 1-y\}$, por (A) e (B) existe $f'(z) = 3x^2$ (ou $f'(z) = 3(y-1)^2$).

Como tal o domínio de diferenciabilidade da função é

$$\{x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \ : \ x = 1-y\} \cup \{x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C} \ : \ x = y-1\}$$

e o domínio de analiticidade o conjunto vazio.

4.2.3 Demonstração do Teorema de Cauchy-Riemann

Esta secção, embora numa primeira passagem seja de leitura opcional, é muito importante para o aluno compreender a relação entre a derivada complexa e a derivação no sentido de $\mathbb{R}^2$. Vamos por isso enunciar e provar um teorema que implica a condição suficiente anteriormente descrita mas que, além disso, clarifica a noção de derivada complexa.

Se convencionarmos representar $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ pelo o ponto $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ e $1 \in \mathbb{C}$ pelo ponto $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, podemos identificar cada ponto de $\mathbb{C}$ com **um e um só** ponto de $\mathbb{R}^2$ por:

$$\mathbb{C} \ni \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2 = \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

Como tal, qualquer função complexa, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com $f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, pode ser interpretada como o campo vectorial $(u,v) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Recordamos que a função f é diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ em $a \in A$ (com A aberto) se e só se existe uma transformação linear $Df(a)$ tal que

$$\frac{f(z+h) - f(z) - Df(a)h}{h} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad h \to 0 \tag{4.4}$$

Se f é diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ em a então:

a) f é contínua em a.

b) Existem as derivadas parciais $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ em a.

c) $Df(a)$ é representada pela matriz jacobiana de f em a:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ v_x(a) & v_y(a) \end{bmatrix}$$

(na base canónica de $\mathbb{R}^2$).

Se existem e são contínuas as derivadas parciais de u e v numa vizinhança de a, então $f = (u, v)$ tem derivada no sentido de $\mathbb{R}^2$ em a.

Lema (relação entre derivada complexa e derivada no sentido de $\mathbb{R}^2$):

Seja $f : A \to \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é aberto e $a \in A$. Então a derivada de f em a existe no sentido complexo se e só se ela existe no sentido de $\mathbb{R}^2$ e é representada por um produto complexo; mais concretamente, dado $\alpha \in \mathbb{C}$, são **equivalentes** as seguintes propriedades de α:

(i) A derivada complexa, $f'(a)$, existe e é igual a ξ:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \xi \tag{4.5}$$

(ii) f tem derivada no sentido de $\mathbb{R}^2$ em a dada por $Df(a)h = \xi h$, para qualquer h, onde ξh designa o produto complexo de ξ por h.

Demonstração: De facto, (4.5) é válida se e só se

$$\frac{f(z+h) - f(z) - \xi h}{h} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando } \ h \to 0,$$

o que, atendendo a (4.4), é equivalente a (ii). □

Teorema de Cauchy-Riemann-Goursat

Seja $f : A \to \mathbb{C}$, onde $A \subset \mathbb{C}$ é aberto e $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in A$. São **equivalentes** as seguintes proposições:

(a) f tem derivada (complexa) em a, $f'(a) \in \mathbb{C}$.

(b) f é diferenciável em a no sentido de $\mathbb{R}^2$ e existe $f'(a) \in \mathbb{C}$ tal que $Df(a)h = f'(a)h$, para qualquer $h \in \mathbb{R}^2$.

(c) f é diferenciável em a (no sentido de $\mathbb{R}^2$) e f verifica as equações de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, em (a_1, a_2).

Se f tem derivada complexa em a, então

$$f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a_1, a_2) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a_1, a_2) = \frac{\partial v}{\partial y}(a_1, a_2) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a_1, a_2)$$

Demonstração:

Prova de que **(a)** $\Leftrightarrow$ **(b)**:
f tem derivada complexa em a, $f'(a)$, se e só se:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \longrightarrow f'(a) \qquad \text{quando } \ h \to 0$$

Pelo Lema isto é equivalente a dizer que f tem derivada no sentido de $\mathbb{R}^2$ em a dada por $Df(a)h = f'(a)h$, para qualquer h.

Prova de que **(b)** $\Leftrightarrow$ **(c)**:
Seja $h = h_1 + \mathrm{i}h_2 \in \mathbb{C}$, que identificamos com $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Vamos provar que a equação

$$Df(a)h = f'(a)h \qquad \text{para qualquer} \quad h \in \mathbb{R}^2$$

é equivalente às equações de Cauchy-Riemann em (a_1, a_2).
Seja $\xi = \alpha + \mathrm{i}\beta$ tal que, para qualquer $h = h_1 + \mathrm{i}h_2$,

$$Df(a)h = \xi h$$

(onde ξh representa um produto complexo). A equação anterior é equivalente a

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(h_1 + \mathrm{i}h_2) = \begin{bmatrix} \alpha h_1 - \beta h_2 \\ \beta h_1 + \alpha h_2 \end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_x h_1 + u_y h_2 &= \alpha h_1 - \beta h_2 \\ \\ v_x h_1 + v_y h_2 &= \beta h_1 + \alpha h_2 \end{cases}$$

para qualquer h (com as derivadas parciais calculadas no ponto a). As identidades anteriores são ambas verdadeiras para qualquer h se e só se:

$$\begin{cases} u_x &= \alpha \\ u_y &= -\beta \\ v_x &= \beta \\ v_y &= \alpha \end{cases} \tag{4.6}$$

Isto prova que existe $\xi \in \mathbb{C}$ tal que $Df(a)h = \xi h$ para todo o $h \in \mathbb{C}$ **se e só se** $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$ no ponto a. Assim sendo, e usando de novo o Lema, (b) é equivalente a (c).

Se $f'(a)$ existir, então pela equivalência de (a) e (c) e pelas equações (4.6):

$$f'(a) = \xi = \alpha + \mathrm{i}\beta = u_x(a) + \mathrm{i}v_x(a) = v_y(a) - \mathrm{i}u_y(a).$$

$\square$

A demonstração do teorema de Cauchy-Riemann é consequência imediata do teorema de Cauchy-Riemann-Goursat.

Matriz Jacobiana de uma Função com Derivada Complexa

Vimos acima que se $f : A \to \mathbb{C}$, com $A \subset \mathbb{C}$ aberto, tem derivada complexa em $a = a_1 + \mathrm{i}a_2 \in A$ então é diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ e satisfaz o teorema de Cauchy-Riemann em (a_1, a_2), de onde se conclui que

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Re} f'(a) \\ \beta &= \operatorname{Im} f'(a) \end{aligned}$$

verificam $\alpha = u_x(a) = v_y(a)$ e $\beta = -u_y(a) = v_x(a)$.

Assim sendo, a matriz jacobiana de f é igual a

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, podemos escrever $f'(a) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ na forma polar:

$$\begin{aligned} \alpha &= r\cos\theta\,, \\ \beta &= r\operatorname{sen}\theta\,, \end{aligned}$$

com $r = |f'(a)|$ e $\theta = \arg f'(a)$. Assim:

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Conclui-se que $J_f(a)$ tem a forma de uma matriz de rotação multiplicada pelo escalar $|f'(a)|$, sendo que o ângulo de rotação é, precisamente, o argumento de $f'(a)$.

O aluno pode facilmente verificar que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = e^{\mathrm{i}\theta}(h_1 + \mathrm{i}h_2)$$

qualquer que seja $h = h_1 + \mathrm{i}h_2 \in \mathbb{C}$.

4.3 Propriedades das Funções Analíticas

O Teorema de Cauchy-Riemann permite demonstrar que, para as funções analíticas são válidas as regras de derivação já conhecidas do cálculo de funções reais de variável real. Mais concretamente:

Soma, produto e quociente
Se f e g são analíticas num conjunto $D \subset \mathbb{C}$, então:

- $f \pm g$ é analítica em D e $(f \pm g)' = f' \pm g'$;
- $f\,g$ é analítica em D e $(fg)' = f'g + fg'$;

- f/g é analítica em $D \setminus \{z : g(z) = 0\}$ e $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Função composta
Se g é analítica num conjunto $D \subset \mathbb{C}$ e f é analítica no contradomínio de g, $g(D)$, então

- $f \circ g$ é analítica em D e $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z)$, para qualquer $z \in D$.

Função Inversa
Seja f uma função analítica e injectiva em D tal que $f'(z) \neq 0$ para qualquer $z \in D$, f^{-1} é contínua em $f(D)$ e $f(D)$ é aberto. Então:

- f^{-1} é analítica em $f(D)$ e $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$, onde $b = f(a)$.

Demonstração: Sendo $b \in f(D)$, considere-se $a \in D$ tal que $b = f(a)$. Se $z \in D$ e $w = f(z) \in f(D)$, então $z = f^{-1}(w)$ e:

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(b)}{w - b} = \frac{z - a}{f(z) - f(a)}$$

Como $f'(z_0) \neq 0$, então o limite seguinte existe e, pela mudança de variável definida pela função contínua $z = f^{-1}(w)$:

$$\lim_{w \to b} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(b)}{w - b} = \lim_{z \to a} \frac{z - a}{f(z) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)} \tag{4.7}$$

Como $f(D)$ é aberto e f^{-1} tem derivada complexa em $f(D)$ então f^{-1} é analítica e a sua derivada em $f(D)$ é dada por (4.7).

Estudo da Analiticidade das Funções Elementares

1. A função $f(z) = z = x + iy$ admite derivada em todo $z \in \mathbb{C}$, dado que $u =$Re $f(z) = x$ e $v =$Im $f(z) = y$:

   (a) têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$;

   (b) verificam as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2$.

   Assim $f(z) = z$ é inteira e para todo $z \in \mathbb{C}$

   $$f'(z) = f'(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 1$$

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f(z) = z^n$ é inteira, dado que é o produto (iterado) de funções inteiras. Para todo $z \in \mathbb{C}$, a derivada é dada por:

   $$(z^n)' = nz^{n-1}$$

   Provemos esta fórmula por indução. O caso $n = 1$ é o exemplo 1. Admitindo agora que para certo $n \in \mathbb{N}$, $(z^n)' = nz^{n-1}$ então, usando a regra da derivada do produto e a hipótese de indução:

   $$(z^{n+1})' = (z^n \cdot z)' = nz^{n-1} \cdot z + z^n \cdot 1 = nz^n + z^n = (n + 1)z^n$$

3. A função polinomial é inteira dado que é a soma de funções inteiras.

4. A função racional $P(z)/Q(z)$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z : Q(z) = 0\}$ dado que é o quociente de funções inteiras.

5. A função exponencial $f(z) = e^z$ admite derivada em todo $z \in \mathbb{C}$, tendo em conta que $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x \operatorname{sen} y$:

   (a) têm derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$;

   (b) verificam as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2$.

   Assim $f(z) = e^z$ é inteira e para todo $z \in \mathbb{C}$

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + \mathrm{i}e^x \operatorname{sen} y = e^z$$

6. As funções $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ são inteiras (construidas a partir da composição, soma, diferença e produto de funções inteiras), tendo-se

$$\Big(\operatorname{sen} z\Big)' = \Big(\frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\Big)' = \cos z \quad \text{e} \quad \Big(\cos z\Big)' = \Big(\frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{\mathrm{i}z}}{2}\Big)' = -\operatorname{sen} z$$

   As funções $\operatorname{tg} z$ e $\operatorname{cotg} z$, por serem o quociente de funções inteiras, são analíticas, respectivamente, em

$$D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{C} \setminus \Big\{z = \frac{2k+1}{2}\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\Big\} \quad , \quad D_{\mathrm{cotg}} = \mathbb{C} \setminus \{z = k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

   tendo-se, nos seus domínios

$$\Big(\operatorname{tg} z\Big)' = \Big(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\Big)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \text{e} \quad \Big(\operatorname{cotg} z\Big)' = \Big(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\Big)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$$

7. As funções $\operatorname{ch} z$ e $\operatorname{sh} z$ são inteiras (somas de funções inteiras), tendo-se

$$\Big(\operatorname{sh} z\Big)' = \Big(\frac{e^z - e^z}{2}\Big)' = \operatorname{ch} z \quad \text{e} \quad \Big(\operatorname{ch} z\Big)' = \Big(\frac{e^z + e^z}{2}\Big)' = \operatorname{sh} z$$

   As funções $\operatorname{tgh} z$ e $\operatorname{cotgh} z$, por serem o quociente de funções inteiras, são analíticas, respectivamente, em

$$D_{\mathrm{tgh}} = \mathbb{C} \setminus \Big\{z = \frac{2k+1}{2}\pi\mathrm{i} \ : \ k \in \mathbb{Z}\Big\} \quad , \quad D_{\mathrm{cotgh}} = \mathbb{C} \setminus \{z = k\pi\mathrm{i} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

   tendo-se nos seus domínios

$$\Big(\operatorname{tgh} z\Big)' = \Big(\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\Big)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} \quad \text{e} \quad \Big(\operatorname{cotgh} z\Big)' = \Big(\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\Big)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$$

8. Considere-se a função valor principal do logaritmo:

$$\log z = \log |z| + \mathrm{i} \arg z, \qquad \text{onde} \quad \arg z \in]-\pi, \pi[$$

Trata-se da inversa da restrição função exponencial, $f(z) = e^z$ definida na faixa (aberta) do plano complexo:

$$D = \{x + \mathrm{i}y : x \in \mathbb{R} \text{ e } -\pi < y < \pi\}$$

Note que f é analítica e bijectiva em D, $f'(z) = e^z \neq 0$. Além disso, $f(D) = \mathbb{C} \setminus K$, onde $K = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi\}$ é o corte do valor principal do logaritmo (o semi-eixo real negativo) e f^{-1} é contínua em $f(D)$. Pelo teorema da analiticidade da função inversa, o valor principal de $\log z$ é uma função analítica no conjunto aberto $\mathbb{C} \setminus K$ e, para qualquer $b = f(a) = e^a \in \mathbb{C} \setminus K$:

$$(\log b)' = \frac{1}{(e^a)'} = \frac{1}{b} \tag{4.8}$$

Da mesma forma se pode obter que o ramo α do logaritmo é uma função analítica em $C \setminus K$, onde $K = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \alpha\}$ é o respectivo corte, e que (4.8) é válida para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

4.3.1 Equações de Cauchy-Riemann em Coordenadas Polares

Esta secção é de leitura opcional. Pode aqui encontrar uma forma alternativa de estudar a analiticidade do logaritmo complexo.

Como já vimos, qualquer $z \in \mathbb{C}$ pode ser escrito ou na forma $z = x + \mathrm{i}y$ ou na forma polar $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, sendo $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Assim, também uma função complexa pode ser caracterizada por

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \quad \text{ou} \quad f(z) = f(re^{\mathrm{i}\theta}) = U(r,\theta) + \mathrm{i}V(r,\theta)$$

Assim, utilizando a regra da derivação da função composta, as fórmulas acima escritas e as condições de Cauchy-Riemann já deduzidas obtém-se, por um lado,

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

e, por outro lado,

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial x}\operatorname{sen}\theta + r\frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta = r\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta + r\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta$$

Conclui-se que, se $r \neq 0$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

De igual modo

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{sen}\theta + r\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = -\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{sen}\theta$$

concluindo-se que, se $r \neq 0$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -r\frac{\partial V}{\partial r}$$

Condição suficiente para a existência de derivada

Se as derivadas parciais de $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ são contínuas em (r_0,θ_0) (com $r_0 \neq 0$) e se verificam as condições de Cauchy-Riemann em coordenadas polares

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

no ponto (r_0,θ_0), então f admite derivada em $z_0 = r_0 e^{\mathrm{i}\theta_0}$.

Como exemplo de aplicação, procedemos ao estudo da analiticidade do valor principal do logaritmo utilizando a forma polar das equações de Cauchy-Riemann e a regra da derivada da função inversa.

Considere-se o valor principal de $\log z$:

$$\log z = \log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta \qquad , \qquad \theta \in]-\pi,\pi]$$

Vimos que esta função não é contínua na semi-recta

$$\{z = xe^{i\pi}\,,\, x \in \mathbb{R}_0^+\}$$

pelo que neste conjunto não existirá derivada. Para estudar a analiticidade no restante domínio, considere-se

$$\mathrm{Re}\ \log z = u(r,\theta) = \log r \quad , \quad \mathrm{Im}\ \log z = v(r,\theta) = \theta$$

Assim

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

verificam

(A) são contínuas em todo $r > 0$ e $\theta \in]-\pi,\pi[$;

(B) verificam as condições de Cauchy-Riemann no mesmo conjunto.

Conclui-se que o valor principal do $\log z$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z = xe^{i\pi}\,,\, x \in \mathbb{R}_0^+\}$. Para z no domínio de analiticidade, utilizando a regra da derivação da função inversa e considerando $w = e^z \Leftrightarrow z = \log w$:

$$\Big(\log w\Big)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$$

De modo análogo se mostra que, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o ramo α do logaritmo,

$$\log z = \log|z| + i\arg z\,, \qquad \arg z \in]\alpha, \alpha + 2\pi],$$

é uma função analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \{z = xe^{i\alpha}\,,\, x \in \mathbb{R}_0^+\},$$

sendo, neste conjunto, válida a mesma regra de derivação.

4.4 Funções Harmónicas

4.4.1 Noções Básicas de Topologia em $\mathbb{C}$

O conjunto dos complexos $\mathbb{C}$ é topologicamente equivalente a $\mathbb{R}^2$, isto é, as definições e propriedades topológicas de $\mathbb{C}$ funcionam de forma idêntica às já introduzidas no estudo de $\mathbb{R}^2$. Assim, dado $D \subset \mathbb{C}$, e $z \in \mathbb{C}$ diz-se que z é um:

- *ponto interior* de D se existe $\epsilon > 0$ tal que $D(z, \epsilon) \subset D$ (note que $D(z, \epsilon) = B_\epsilon(z)$);
- *ponto exterior* se for um ponto interior do complementar de D, $\mathbb{C} \setminus D$.
- *ponto fronteiro* se não for nem interior nem exterior, ou seja, se para qualquer $\epsilon > 0$, o disco $D(z, \epsilon)$ intersecta tanto D como o complementar de D. O conjunto de todos os pontos fronteiros de D designa-se por fronteira de D e representa-se por ∂D;
- *ponto aderente* se for interior ou fronteiro. O conjunto de todos os pontos aderentes de D denomina-se por *aderência* de D e representa-se por $\bar{D}$. Note que $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Diz-se que D é

- *aberto* se todos os pontos de D são pontos interiores, isto é:
$$\forall z \in D \;\; \exists \epsilon > 0 \;\; : \;\; D(z, \epsilon) \subset D.$$
- *fechado* se o conjunto $\mathbb{C} \setminus D$ for aberto ou, equivalentemente, se todos os pontos aderentes a D estão em D, isto é $\bar{D} = D$.
- *conexo* se não existirem subconjuntos não vazios de D, A e B, que verifiquem
  - ◇ $A \cup B = D$;
  - ◇ $\bar{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \bar{B} = \emptyset$. [2]
- Um conjunto aberto é conexo se e só se não pode ser escrito como a união de dois conjuntos abertos e disjuntos.
- *simplesmente conexo* se for conexo e qualquer curva de fechada for homotópica a um ponto, isto é, qualquer curva fechada em D pode ser deformada continuamente num ponto sem sair do conjunto. [3]
- *multiplamente conexo* se for conexo e não for simplesmente conexo.

[2] Dois conjuntos não vazios tais que cada um deles é disjunto da aderência do outro, dizem-se *separados*. Então D é conexo se e só se não pode ser escrito como a união de dois conjuntos separados.

[3] Intuitivamente, um conjunto $D \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexo se for um "conjunto conexo sem buracos"; "D não tem buracos" descreve-se rigorosamente pela proposição: para qualquer $z : [0,1] \to D$ contínua, com $z(0) = z(1)$ existe $z_0 \in D$ e uma função contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ tal que $H(0,t) = z(t)$ $\forall t \in [0,1]$ e $H(1,t) = z_0$, $\forall t \in [0,1]$. A função H diz-se uma homotopia (de $z(t)$ em z_0) e deforma continuamente, sem sair de D, a curva parametrizada por $z(t)$ no ponto z_0.

4.4.2 Funções Harmónicas no Plano

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto, e $u : D \to \mathbb{R}$. A função u diz-se *harmónica* em D sse $u \in C^2(D)$ e para todo $(x, y) \in D$

$$\Delta u \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Δ designa o operador laplaciano (por vezes também representado por ∇^2).

Relação entre funções harmónicas (em $\mathbb{R}^2$) e funções analíticas (em $\mathbb{C}$)

- Se $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica em U e $f = u + iv$ então u e v são funções *harmónicas* em $D \subset \mathbb{R}^2$. Nestas condições, u e v denominam-se *harmónicas conjugadas*.

  Se $f = u + iv$ é analítica em $A \subset \mathbb{C}$ então u e v são de classe C^∞ em $A \subset \mathbb{R}^2$ [4]. Derivando então ambos os membros da equação $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ em ordem a x, resulta que:

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

  Por outro lado, derivando ambos os membros da equação $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ em ordem a y e usando o teorema de Schwarz, obtém-se:

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

  Em consequência:

  $$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{em } A.$$

  Derivando a primeira equação de Cauchy-Riemann em ordem a y e a segunda em ordem a x, obtém-se identicamente:

  $$\Delta v = 0 \qquad \text{em } A.$$

  Observa-se pois que as partes real e imaginária de uma função analítica verificam a equação de Laplace. Esta ligação entre funções analíticas e a equação de Laplace reforça a importância das funções de variável complexa e abre caminho para numerosas aplicações da matemática.

- Reciprocamente, seja $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função harmónica e $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo. Então, pelas equações de Cauchy-Riemann (e usando a notação $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$):

  $$\nabla v = (v_x, v_y) = (-u_y, u_x).$$

  Como D é simplemente conexo, então para que a equação anterior tenha solução, v, basta que o campo vectorial $(-u_y, u_x)$ seja fechado, ou seja,

  $$\frac{\partial}{\partial y}\big(-u_y\big) = \frac{\partial}{\partial x} u_x \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta u = 0 \quad \text{em } D.$$

[4] A provar posteriormente, ver subsecção 5.5

Assim, se u for harmónica num conjunto simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$, então é sempre possível determinar (a menos de uma constante) a sua harmónica conjugada $v : D \to \mathbb{R}$, através das equações de Cauchy-Riemann.

Exemplo:
Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x,y) = y(x-3)\,.$$

Vamos começar por mostrar que u é uma função harmónica em $\mathbb{R}^2$. Por ser uma função polinomial, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x-3 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

concluindo-se o pretendido e, consequentemente, que u é a parte real (ou imaginária) de uma função inteira f. Para determinar $f = u + \mathrm{i}v$ recorde-se que se f é inteira então as condições de Cauchy-Riemann são verificadas em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int y\,dy + c(x) = \frac{y^2}{2} + c(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad x-3 = -c'(x) \quad \Rightarrow \quad c(x) = -\frac{x^2}{2} + 3x + c$$

Então $v(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$ e

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = y(x-3) + \mathrm{i}\Big(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x + c\Big)\,, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Note que:

$$f(z) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(x^2 + 2x(\mathrm{i}y) + (\mathrm{i}y)^2\right) + 3\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y) + \mathrm{i}c = -\frac{\mathrm{i}}{2}z^2 - 3\mathrm{i}z + \mathrm{i}c.$$

Capítulo 5

Integração em $\mathbb{C}$

5.1 Curvas em $\mathbb{C}$

Sendo $z(t)$ uma função complexa **contínua** de domínio $[a,b] \subset \mathbb{R}$, define-se *caminho* ou *curva orientada* em $\mathbb{C}$ como sendo o conjunto de pontos

$$\gamma = \Big\{ z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t) \quad : \quad t \in [a,b] \Big\},$$

que se convenciona percorrido no sentido especificado por $z(t)$. Os pontos $z(a)$ e $z(b)$ denominam-se respectivamente o *ponto inicial* e o *ponto final* do caminho. A aplicação $z(t)$ diz-se uma *parametrização* de γ. [1]

Exemplos:

1. **Parametrização de um segmento de recta**

   O segmento de recta que une z_0 a z_1 pode ser parametrizado por:

   $$z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = tz_1 + (1-t)z_0 \qquad \text{onde} \quad 0 \le t \le 1$$

2. **Parametrização da circunferência centrada na origem de raio 1**

   Esta circunferência, se percorrida no sentido directo, pode simplesmente ser parametrizada por:

   $$z(t) = \cos t + \mathrm{i} \operatorname{sen} t = e^{\mathrm{i}t} \qquad , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

   De facto, é óbvio que $x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$.

3. **Parametrização de uma circunferência genérica**

   Os pontos, z, de uma circunferência centrada em $z_0 \in \mathbb{C}$ de raio $r > 0$ verificam $|z - z_0| = r$. Assim sendo, $z - z_0 = re^{\mathrm{i}\theta}$, onde θ é o argumento de $z - z_0$. Desta forma, podemos tomar:

   $$z(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}, \qquad \text{onde} \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

   (se a circunferência for percorrida uma vez no sentido directo), e

   $$z(t) = z_0 + re^{-\mathrm{i}t}, \qquad \text{onde} \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

   (se a circunferência for percorrida uma vez no sentido inverso).

[1] Um caminho é pois uma curva à qual se acrescenta uma orientação. Neste sentido, quando nos referirmos a uma curva percorrida de uma certa forma, estamos a caracterizar um caminho.

4. A função $z(t) = x(t) + iy(t)$ definida por

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} , \quad t \in [-1, 2]$$

é uma parametrização da porção da parábola $y = x^2$ unindo o ponto $z(-1) = -1 + i$ ao ponto $z(2) = 2 + 4i$.

O caminho γ (e a respectiva curva) diz-se

- **regular** se $z(t)$ é continuamente diferenciável, isto é, se $x'(t)$ e $y'(t)$ existem e são contínuas em $]a, b[$). Nesse caso tem-se que

$$z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t)$$

Se $z'(t) \neq 0$ então $z'(t)$ designa um vector tangente à curva no ponto $z(t)$.

Todas as curvas dos exemplos acima descritos são regulares, sendo que:

1. se $z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = tz_1 + (1-t)z_0$ tem-se que $z'(t) = z_1 - z_0$ (que é constante);
2. se $z(t) = e^{\mathrm{i}t}$ tem-se que $z'(t) = ie^{\mathrm{i}t}$;
4. se $z(t) = t + \mathrm{i}t^2$ tem-se que $z'(t) = 1 + 2\mathrm{i}t$.

Em todos os exemplos, existe vector tangente em qualquer dos pontos da curva.

- **seccionalmente regular** se $z(t)$ é regular para $t \in]a, b[\setminus \{t_1, ..., t_k\}$;

Exemplo: a curva γ parametrizada por

$$z(t) = \begin{cases} t + \mathrm{i}t^2 & \text{se} \quad -1 \leq t \leq 2 \\ t + 4\mathrm{i} & \text{se} \quad 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

é seccionalmente regular. É fácil de observar que γ é a concatenação da porção da parábola $y = x^2$ unindo $-1 + \mathrm{i}$ a $2 + 4\mathrm{i}$ com o segmento de recta horizontal $\mathrm{Im}z = 4$ unindo $2 + 4\mathrm{i}$ a $3 + 4\mathrm{i}$. Ambas as curvas são regulares. No entanto a curva γ não é regular visto não existir $z'(2)$.

- **simples** se $z(t)$ é injectiva em $]a, b]$ e em $[a, b[$, isto é, se $t_1 \neq t_2$ então $z(t_1) \neq z(t_2)$ ou ($t_1 = a$ e $t_2 = b$). [2].

- **fechada** se $z(a) = z(b)$;

- **curva de Jordan** se for simples e fechada.

Teorema da Curva de Jordan:

Qualquer curva de Jordan, γ, divide $\mathbb{C}$ em duas regiões disjuntas, ambas com fronteira γ, uma das quais, denotada por *interior de* γ, $\mathrm{int}\,\gamma$, é limitada e a outra, denotada por *exterior de* γ, $\mathrm{ext}\,\gamma$, é não limitada.

[2]Ou seja, um caminho simples apenas se pode autointersectar nos extremos.

5.2 Integral complexo

Se $\gamma \subset \mathbb{C}$ é um caminho seccionalmente regular, parametrizado por $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, e f uma função complexa contínua em γ, define-se

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\, dt \tag{5.1}$$

Note-se que o integral do 2º membro da igualdade (5.1) pode ser interpretado como o integral da função vectorial, $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ dada por $F(t) = f(z(t))z'(t)$ para $t \in [a, b]$, e que é obtido à custa do integral de Riemann das funções reais de variável real por:

$$\int_a^b F(t)\, dt \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} F(t)\, dt + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im} F(t)\, dt \tag{5.2}$$

Exemplo:

Pretende-se determinar $\int_\gamma e^{\bar{z}}\, dz$ em que γ é o segmento de recta que une $-\mathrm{i}$ a $1 + \mathrm{i}$. Uma possível parametrização de γ é

$$z(t) = -\mathrm{i} + t\big((1 + \mathrm{i}) - (-\mathrm{i})\big) = t + \mathrm{i}(2t - 1) \quad , \quad t \in [0, 1]$$

Assim

$$\int_\gamma e^{\bar{z}}\, dz = \int_0^1 e^{\overline{t+\mathrm{i}(2t-1)}}\big(t + \mathrm{i}(2t - 1)\big)' dt = \int_0^1 e^{t+\mathrm{i}(1-2t)}(1 + 2\mathrm{i})dt = \frac{-3 + 4\mathrm{i}}{5}(e^{1-\mathrm{i}} - e^{\mathrm{i}})$$

As propriedades elementares do integral de Riemann (por exemplo, a linearidade) verificam-se para o integral (5.2). Torna-se, no entanto, necessário provar propriedades envolvendo desigualdades. Em particular, queremos verificar que

$$\left|\int_a^b F(t)\, dt\right| \le \int_a^b |F(t)|\, dt$$

(esta desigualdade será necessária para majorar integrais complexos). Para tal, escreva-se

$$I = \int_a^b F(t)\, dt = re^{\mathrm{i}\theta},$$

com $r = |I|$ e $\theta = \arg I$. Então:

$$\begin{aligned}
|I| \;=\; r \;=\; e^{-\mathrm{i}\theta} I \;&=\; \int_a^b e^{-\mathrm{i}\theta} F(t)\, dt \\
&= \int_a^b \operatorname{Re}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}F(t)\right)\, dt + \underbrace{\mathrm{i}\int_a^b \operatorname{Im}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}F(t)\right)\, dt}_{=0 \quad \text{pois} \quad |I| \in \mathbb{R}} \\
&\le \int_a^b \left|e^{-\mathrm{i}\theta}F(t)\right| dt = \int_a^b |F(t)| dt
\end{aligned}$$

Invariância por reparametrização. Seja γ um caminho simples, e f contínua em γ. Se $z(s)$, com $s \in [a,b]$, e $w(t)$, com $t \in [\alpha,\beta]$ são duas parametrizações distintas de γ, então

$$\int_a^b f(z(s))z'(s)\, ds = \int_\alpha^\beta f(w(t))w'(t)\, dt$$

Demonstração:

Consideremos primeiro o caso de uma curva aberta. Dado que a curva é aberta e simples, $z(s)$ e $w(t)$ são injectivas em, respectivamente, $[a,b]$ e $[\alpha,\beta]$. Então $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, que pode ser definida por

$$w(t) = z(\varphi(t))\ \forall t \in [\alpha,\beta] \quad \Leftrightarrow \quad w = z \circ \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = z^{-1} \circ w$$

é injectiva em $[\alpha,\beta]$. Em consequência:

$$\int_\alpha^\beta f\big(w(t)\big)w'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f\big(z(\varphi(t))\big)z'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\, dt = \int_a^b f\big(z(s)\big)z'(s)\, ds$$

A última igualdade decorre da substituição de variável $s = \varphi(t)$.

O caso de uma curva fechada prova-se agora facilmente, escrevendo-a como a união de duas curvas abertas. $\square$.

Vemos assim que o integral está bem definido no caso de o caminho ser simples, pois o seu valor é independente da parametrização utilizada. A partir da definição, mostram-se facilmente as seguintes propriedades:

Propriedades do integral

- **(Linearidade)** Se f e g são funções contínuas em γ, e α, β constantes complexas, então

$$\int_\gamma \big(\alpha\, f(z) + \beta\, g(z)\big)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz + \beta \int_\gamma g(z)\, dz$$

- **(Aditividade)** Se γ é a concatenação de duas curvas regulares, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, então

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

  Note que se o extremo final de γ_1 coincide com o extremo inicial de γ_2, a concatenação dos caminhos γ_1 com γ_2, $\gamma_1 + \gamma_2$, consiste na união das curvas, percorrendo primeiro γ_1 e depois γ_2.

- **(Simetria)** Se denotarmos por $-\gamma$ o caminho γ percorrido em sentido inverso ao de γ, então

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$

- **(Majoração do Integral)** Se f é contínua no caminho regular γ, e $z(t)$, com $t \in [a,b]$ é uma parametrização de γ, então

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt \leq ML(\gamma)$$

onde $M \geq 0$ é um majorante de $|f(z)|$ em γ. Note que o comprimento da curva γ é dado por:

$$L(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |z'(t)|dt$$

Exemplos:

1. Considere-se a função $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$, e a curva γ que une 0 a $2+\mathrm{i}$ através do segmento de recta unindo 0 a $1+\mathrm{i}$ — que designamos por γ_1 — e do segmento de recta unindo $1+\mathrm{i}$ a $2+\mathrm{i}$ — que designamos por γ_2. Desta forma, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$; usando a aditividade do integral:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Uma parametrização possível para γ_1 é

$$z_1(t) = (1+\mathrm{i})t \qquad , \qquad t \in [0,1]$$

pelo que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 f\big((1+\mathrm{i})t\big)\big((1+\mathrm{i})t\big)'dt = (1+\mathrm{i})\int_0^1 (t^2+\mathrm{i}t^2)dt = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{3} = \frac{2\mathrm{i}}{3}$$

Por outro lado, uma parametrização possível para γ_2 é

$$z_2(t) = t + \mathrm{i} \qquad , \qquad t \in [1,2]$$

pelo que

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz. = \int_1^2 f(t+\mathrm{i})\big(t+\mathrm{i}\big)'dt = \int_1^2 (t^2+\mathrm{i})dt = \frac{7}{3} + \mathrm{i}$$

Concluimos que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. = \frac{7}{3} + \frac{5\mathrm{i}}{3}$$

2. Vamos obter uma estimativa do valor do integral

$$\Big|\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz\Big|$$

onde γ é a circunferência $|z| = 2$ percorrida uma vez em sentido directo. Pela propriedade da majoração do integral temos que

$$\Big|\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz\Big| \leq \int_\gamma \Big|\frac{e^z}{z^2+1}\Big||dz| \leq M\int_\gamma |dz|$$

em que M é um majorante do módulo da função $\frac{e^z}{z^2+1}$ em γ. Para o determinar, e escrevendo $z = x + \mathrm{i}y$, tem-se que

$$|e^z| = |e^{x+\mathrm{i}y}| = e^x \leq e^2 \qquad \text{pois na curva} \qquad x \leq |z| = 2$$

e, como consequência da desigualdade triangular,

$$|z^2 + 1| \geq \Big||z|^2 - 1\Big| = |4 - 1| = 3 \qquad \text{se} \qquad |z| = 2$$

Então, para $z \in \gamma$

$$\Big|\frac{e^z}{z^2+1}\Big| \leq \frac{|e^z|}{|z^2+1|} \leq \frac{e^2}{3}$$

e assim

$$\Big|\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+1} dz\Big| \leq \frac{e^2}{3}\int_\gamma |dz| = \frac{4\pi e^2}{3}$$

tendo em conta que $\int_\gamma |dz|$ é igual ao comprimento de γ, ou seja, 4π.

5.3 Primitivação e Teorema Fundamental do Cálculo

Sendo $f : D \to \mathbb{C}$, onde D é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, diz-se que f tem uma primitiva (ou é primitivável) em D se existe $F : D \to \mathbb{C}$ tal que

$$F' = f.$$

Esta definição implica, em particular, que F tem derivada em qualquer ponto do conjunto aberto D e, consequentemente, f é analítica em D.

Exemplo:

1. A função $F(z) = -\cos z$ é uma primitiva de $f(z) = \operatorname{sen} z$, visto que $(-\cos z)' = \operatorname{sen} z$. Dado que $(-\cos z + C)' = \operatorname{sen} z$, qualquer que seja $C \in \mathbb{C}$, $-\cos z + C$ é a expressão geral das primitivas de $\operatorname{sen} z$ em $\mathbb{C}$.

2. Se f e g são funções analíticas, vimos que o seu produto é tambem uma função analítica e $(fg)' = f'g + fg'$. Então podemos deduzir a fórmula da primitivação por partes

$$P(fg') = fg - P(f'g)$$

3. Uma primitiva da função $f(z) = \frac{1}{z}$ no conjunto $D = \{z \ : \ \arg z \neq \pi\}$ é o valor principal do logaritmo. Dado que $(\log z)' = \frac{1}{z}$ em D, então a expressão geral das primitivas de $\frac{1}{z}$ em D é $\log z + C$, onde C é uma constante arbitrária complexa.

O seguinte teorema (já conhecido no caso dos integrais de linha em $\mathbb{R}^2$), por um lado, caracteriza as funções primitiváveis em $\mathbb{C}$ e, por outro lado, permite concluir a indepêndencia do caminho de integração.

Teorema Fundamental do Cálculo

Sendo $D \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : D \to \mathbb{C}$ contínua em D, são equivalentes as seguintes proposições:

a) f tem primitiva em D.

b) Se γ é qualquer caminho fechado em D (não necessita de ser simples), então

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

c) O integral complexo é independente do caminho de integração: se γ_1 e γ_2 são dois caminhos que têm o mesmo ponto inicial e final, então:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Em consequência, se γ é um caminho em A com ponto inicial z_1 e ponto final z_2 e a primitiva de f em A existe e é igual a F, então:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1). \tag{5.3}$$

Dem.:

a) $\Rightarrow$ **b)** (e fórmula (5.3)): Sendo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$ e, usando desde já **a)**, resta-nos provar que

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \oint_\gamma F'(z)\,dz = 0$$

Começamos por mostrar que

$$\frac{d}{dt} F\big(\gamma(t)\big) = F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$$

Usando a notação $F(x+\mathrm{i}y) = U(x,y) + iV(x,y)$ e $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, temos:

$$\frac{d}{dt} F\big(x(t)+\mathrm{i}y(t)\big) = \frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x}x'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial y}y'(t),$$

onde as derivadas parciais de U e V são calculadas em $\big(x(t), y(t)\big)$. Como F é analítica em A, usando as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F\big(x(t)+\mathrm{i}y(t)\big) &= \frac{\partial U}{\partial x}x'(t) - \frac{\partial V}{\partial x}y'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x}x'(t) + \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial x}y'(t) \\
&= \frac{\partial U}{\partial x}\big(x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\big) + \frac{\partial V}{\partial x}\big(\underbrace{-y'(t) + \mathrm{i}x'(t)}_{=\mathrm{i}\left(\mathrm{i}y'(t)+x'(t)\right)}\big) \\
&= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + \mathrm{i}\frac{\partial V}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\right)\big(x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\big) \\
&= F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)
\end{aligned}$$

Usando agora o teorema fundamental do cálculo para funções reais de variável real:

$$\oint_\gamma F'(z)\,dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F\big(\gamma(t)\big)\,dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) = 0.$$

Para provar a fórmula (5.3), tendo em conta que neste caso γ não é (em geral) uma curva fechada, temos simplesmente:

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

b) $\Rightarrow$ c): Sejam $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ dois caminhos com o mesmo ponto inicial e final, isto é, $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ e $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$. Então $-\gamma_1 + \gamma_2$ é uma curva fechada; usando **b)** e a aditividade do integral complexo:

$$0 = \oint_{-\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

c) $\Rightarrow$ a): Por hipótese, o integral complexo não depende do caminho de integração. Como tal, fixando um $z_0 \in D$, podemos definir a função $F : D \to \mathbb{C}$ por

$$\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = \int_\gamma f(w)\,dw$$

em que γ é qualquer caminho regular unindo z_0 a z e tomando valores em D. Note que **c)** garante que o valor de $F(z)$ está bem definido para qualquer $z \in D$.

Considere-se também $r > 0$ para o qual $D(z, r) \subset D$, $z_1 \in D(z, r)$ e s o segmento de recta unindo z a z_1. Então

$$F(z) = \int_\gamma f(w)\,dw \qquad , \qquad F(z_1) = \int_{\gamma+s} f(w)\,dw$$

É então fácil verificar que

$$\begin{aligned}\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z) &= \frac{1}{z - z_1}\Big(\int_s f(w)\,dw \;-\; f(z)(z - z_1)\Big) \\ &= \frac{1}{z - z_1}\int_s \Big(f(w) - f(z)\Big)\,dw\end{aligned}$$

Por continuidade de f em D, para qualquer $\epsilon > 0$ existe $r > 0$ para o qual se tem $|f(w) - f(z)| < \epsilon$ sempre que $|z - w| < r$. Assim

$$\Big|\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z)\Big| \leq \frac{\epsilon}{|z - z_1|}\int_s |dw| = \epsilon$$

Conclui-se que

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z)$$

ou seja, para qualquer $z \in D$ tem-se que $F'(z) = f(z)$. Conclui-se que F é analítica e é uma primitiva de f em D.

$\square$

Exemplo:

Vamos calcular o valor do integral $\displaystyle\int_C \left(\frac{1}{z-2} + ze^{z^2}\right) dz$, sendo C a curva parametrizada por $\gamma(t) = 3\cos(t) + 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}(t)$, com $t \in [0, 3\pi/2]$.

Observe-se em primeiro lugar que a função ze^{z^2} é primitivável em $\mathbb{C}$, pelo que o Teorema Fundamental do Cálculo é aplicável. Assim

$$\int_C ze^{z^2}\,dz = \mathrm{P}\left(ze^{z^2}\right)\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(3\pi/2)} = \frac{1}{2}e^{z^2}\Big|_3^{-2\mathrm{i}} = \frac{e^{-4} - e^9}{2},$$

onde $\mathrm{P}\left(\mathrm{z}e^{z^2}\right)$ designa uma primitiva da função $f(z) = ze^{z^2}$. Por outro lado, dado que todos os ramos de $\log(z-2)$ são primitivas da função $\frac{1}{z-2}$ num dado conjunto, há que ter o cuidado de escolher um ramo que seja uma função analítica num conjunto aberto que contenha a curva C. Para esse efeito, considere o ramo do logaritmo tal que $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-2) < \frac{7\pi}{4}$; o seu domínio de analiticidade é:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : z = 2 + re^{\mathrm{i}\theta} \text{ onde } -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4} \text{ e } r > 0\}.$$

Para $z \in D$, vamos então usar o ramo[3]:

$$\log(z-2) = \log|z-2| + \mathrm{i}\arg(z-2), \qquad \text{onde} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \arg(z-2) < \frac{7\pi}{4}.$$

Trata-se de uma função analítica em D, com a curva C contida em D e $\frac{d}{dz}\log(z-2) = \frac{1}{z-2}$ para qualquer $z \in D$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_C \frac{1}{z-2}dz = \log(z-2)\Big|_{\gamma(0)}^{\gamma(3\pi/2)} = \log(-2\mathrm{i} - 2) - \log(3-2) = \frac{3}{2}\log 2 + \mathrm{i}\,\frac{5\pi}{4}.$$

Finalmente:

$$\int_C \left(\frac{1}{z-2} + ze^{z^2}\right) dz = \frac{e^{-4} - e^9}{2} + \frac{3}{2}\log 2 + \mathrm{i}\,\frac{5\pi}{4}$$

5.4 Teorema de Cauchy e suas Consequências

Na secção anterior vimos, em particular, que qualquer função, f, primitivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$, verifica

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para qualquer curva fechada contida em D. A generalização deste resultado a qualquer função analítica é feita através seguinte teorema.

Teorema de Cauchy

[3] Deve esboçar o domínio de analiticidade deste ramo de $\log(z-2)$ e a curva C.

Se γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular e f é analítica num aberto simplesmente conexo contendo γ, então

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

"Dem.:" (com uma hipótese adicional)

Vamos assumir como provado que (no sentido de $\mathbb{R}^2$) uma função analítica, f, é de classe C^1 [4]. Assim, sendo $f = u + \mathrm{i}v$ analítica em D, u e v são funções continuamente diferenciáveis em D. Tem-se então que

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)\,dz &= \oint_\gamma \Big(u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\Big)(dx + \mathrm{i}dy)\\ &= \oint_\gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + \mathrm{i}\oint_\gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\end{aligned}$$

Atendendo às condições do Teorema (γ uma curva de Jordan definida num aberto simplesmente conexo D) e à hipótese adicional (u e v continuamente diferenciáveis em D) podemos aplicar o Teorema de Green[5] aos dois integrais de linha da expressão anterior, obtendo-se

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \iint\limits_{\mathrm{int}\gamma} \Big(\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dx\,dy + \mathrm{i}\iint\limits_{\mathrm{int}\gamma}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dx\,dy$$

Visto a região int $\gamma \subset D$ (porque D é simplesmente conexo) e f é analítica em D, verificam-se as condições de Cauchy-Riemann na região int γ e, como tal,

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

□

Exemplos:

1. Considere-se a função complexa $f(z) = \mathrm{sh}(\cos^2 z))$. Dado que f é uma função inteira, o Teorema de Cauchy permite concluir que

$$\oint_\gamma \mathrm{sh}(\cos^2 z))\,dz = 0$$

para qualquer curva de Jordan em $\mathbb{C}$.

[4] A conclusão do teorema de Cauchy pode ser provada sem recurso a esta hipótese adicional. A demonstração completa do teorema — devida a Goursat — é, contudo, bem mais elaborada do que esta, que apresentamos.

[5] **Teorema de Green:** Sendo γ uma curva de Jordan contida em $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e simplesmente conexo, e sendo P e Q duas funções reais de classe C^1 em D, então:

$$\oint_\gamma P dx + Q dy = \iint\limits_{\mathrm{int}\gamma}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dx\,dy$$

2. Dados z_0 e $z_1 \in \mathbb{C}$ fixos, considere-se a função complexa $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$. Por ser o quociente de funções inteiras, f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Assim, sendo γ a circunferência de centro em z_1 e de raio $R < |z_1 - z_0|$ (isto é, z_0 pertence ao exterior da circunferência), conseguimos determinar um conjunto D aberto e simplesmente conexo que contém a curva e ao qual z_0 não pertence (por exemplo $D = \{z \ : \ |z - z_1| < R + \epsilon\}$ com ϵ tão pequeno quanto seja necessário). Pelo Teorema de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = 0$$

Considerando agora $z_0 = z_1$ e $R > 0$ arbitrário, é óbvio que não se consegue determinar D nas condições do teorema, visto que para que f seja analítica em D z_0 não pode pertencer a D. Mas para que D seja simplesmente conexo $z_0 \in$int $\gamma \subset D$. Assim o Teorema de Cauchy não é aplicável.

Para calcular o integral, e assumindo que a curva está a ser percorrida em sentido directo, considere-se a parametrização de γ dada por $z(t) = z_0 + Re^{\mathrm{i}t}$, com $t \in [0, 2\pi]$. Então

$$\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + Re^{\mathrm{i}t} - z_0} (z_0 + Re^{\mathrm{i}t})' dt = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}}{Re^{\mathrm{i}t}} dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\, dt = 2\pi \mathrm{i}$$

Se γ é percorrida no sentido inverso, então:

$$\oint_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = - \oint_{\gamma^-} \frac{1}{z - z_0} dz = -2\pi \mathrm{i}.$$

Consequências do Teorema de Cauchy

- Independência do caminho de integração

  Se f é analítica num aberto simplesmente conexo, $D \subset \mathbb{C}$, z_1, $z_2 \in D$ e γ_1, γ_2 duas curvas seccionalmente regulares em D unindo z_1 a z_2. Então

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

  Como consequência, no caso de f ser analítica podemos definir

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

  em que γ é qualquer curva regular unindo z_1 a z_2 definida em D.

- Teorema de Cauchy Generalizado

  Seja $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e simplesmente conexo, γ uma curva de Jordan em D, γ_1, ... γ_n curvas de Jordan contidas no interior de γ e verificando para $i \neq j$

- $\overline{\text{int}(\gamma_j)} \cap \overline{\text{int}(\gamma_i)} = \emptyset$;
- todas as curvas têm orientação igual à orientação de γ.

Sendo ainda, f uma função analítica em $\overline{\text{int}(\gamma)} \setminus \Big(\text{int}(\gamma_1) \cup ... \cup \text{int}(\gamma_n)\Big)$, então

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)\, dz$$

Exemplo:

1. Sendo z_0 um ponto qualquer de $\mathbb{C}$ e γ uma curva de Jordan tal que $z_0 \notin \gamma$. Então

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad z_0 \notin \text{int}\,\gamma \\ \pm 2\pi \mathrm{i} & \text{se} \quad z_0 \in \text{int}\,\gamma \end{cases}$$

   Num exemplo anterior, já tinhamos concluido que o integral é 0 se z_0 é um ponto exterior à curva e, efectuando o cálculo pela definição, que

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi \mathrm{i}$$

   onde a curva é percorrida em sentido positivo. O Teorema de Cauchy generalizado permite concluir que se γ for percorrida positivamente e estiver nas condições enunciadas, se tem

$$\oint_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz = \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi \mathrm{i}$$

   sendo $R > 0$ escolhido de forma a que $D(z_0, R) \subset$ int γ. Idem para o sentido negativo.

2. Sendo γ uma curva de Jordan percorrida em sentido directo e tal que $\pm 1 \notin \gamma$. Então

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \pm 1 \notin \text{int}\,\gamma \\ \pi \mathrm{i} & \text{se} \quad 1 \in \text{int}\,\gamma \;\text{ e }\; -1 \notin \text{int}\,\gamma \\ -\pi \mathrm{i} & \text{se} \quad -1 \in \text{int}\,\gamma \;\text{ e }\; 1 \notin \text{int}\,\gamma \\ 0 & \text{se} \quad \pm 1 \in \text{int}\,\gamma \end{cases}$$

   De facto:

   * se ± 1 não pertencem à região interior a γ o resultado é uma consequência imediata do Teorema de Cauchy;
   * para o caso em que 1 pertence à região interior a γ e -1 pertence à sua região exterior, observa-se que $\frac{1}{z+1}$ é analítica num conjunto aberto simplesmente conexo contendo γ e, como tal é aplicável a Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1} dz = 2\pi \mathrm{i} \frac{1}{z+1}\Big|_{z=1} = \pi \mathrm{i}$$

   * para o caso em que -1 pertence à região interior a γ e 1 pertence à sua região exterior, observa-se que $\frac{1}{z-1}$ é analítica num conjunto aberto e simplesmente conexo contendo γ e, como tal, é aplicável a Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz = \oint_\gamma \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi \mathrm{i} \frac{1}{z-1}\Big|_{z=-1} = -\pi \mathrm{i}$$

$*$ por último, se tanto 1 como -1 pertencem à região interior à curva γ, pelo teorema de Cauchy generalizado

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2-1} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{z^2-1} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{1}{z^2-1} dz = 0$$

em que γ_1 é qualquer curva de Jordan percorrida em sentido positivo e tal que $1 \in$ int γ_1 e $-1 \notin$ int $\gamma_1 \cup \gamma_1$, e γ_2 é qualquer curva de Jordan percorrida em sentido positivo e tal que $-1 \in$ int γ_2 e $1 \notin$ int $\gamma_2 \cup \gamma_2$.

- Generalização do Teorema de Cauchy

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo, γ uma curva de Jordan em D, z_0 um ponto pertencente à região interior a γ e f uma função analítica em $D \setminus \{z_0\}$ verificando

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$$

Então

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

Dem:

Pelo Teorema de Cauchy generalizado, tem-se que para ϵ suficientemente pequeno

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = \oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z)\, dz \quad , \quad \forall \epsilon > 0$$

tendo a circunferência a mesma orientação que γ. Por outro lado, dada a hipótese $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ podemos determinar δ tão pequeno quanto se necessite, de forma a que

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(z - z_0) f(z)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_0|}$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\gamma} f(z)\, dz \right| &= \left| \oint_{|z-z_0|=\epsilon} f(z)\, dz \right| \leq \oint_{|z-z_0|=\epsilon} |f(z)||dz| \\ &\leq \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{\epsilon}{|z - z_0|} |dz| = \oint_{|z-z_0|=\epsilon} |dz| = 2\pi\epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ obtém-se

$$\left| \oint_{\gamma} f(z)\, dz \right| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

$\square$

5.5 Fórmulas Integrais de Cauchy

- Fórmula Integral de Cauchy

Se γ é uma curva de Jordan e f é analítica num aberto simplesmente conexo contendo γ, então para qualquer $z_0 \in \operatorname{int}(\gamma)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

onde γ é percorrida uma vez no sentido directo.

Dem.

Dado que f é analítica em z_0, tem-se que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$$

Assim estamos nas condições da generalização do teorema de Cauchy, e

$$\oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$$

Então

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 + 2\pi \mathrm{i} f(z_0)$$

□

Exemplo:

1. Vamos calcular

$$\oint_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2}} dz$$

sendo γ qualquer curva de Jordan em $\mathbb{C}$ orientada positivamente e tal que $\frac{\pi}{2} \in$ int γ. Dado que $f(z) = e^{-z}$ é inteira, estamos nas condições da fórmula integral de Cauchy e podemos concluir que

$$\oint_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi \mathrm{i} f(\frac{\pi}{2}) = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{e}^{-\pi/2}$$

2. Vamos calcular

$$\oint_\gamma \frac{z}{2z + 1} dz$$

sendo γ qualquer curva de Jordan em $\mathbb{C}$ orientada positivamente e tal que $-\frac{1}{2} \in$int γ. Atendendo a que a função $f(z) = z$ é inteira, por aplicação da fórmula integral de Cauchy, obtem-se

$$\oint_\gamma \frac{z}{2z + 1} dz = \frac{1}{2} \oint_\gamma \frac{z}{z + \frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2}\, 2\pi \mathrm{i} f\Big(- \frac{1}{2}\Big) = -\frac{\pi \mathrm{i}}{2}$$

3. Vamos calcular

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3+9z}dz$$

em que γ é a circunferência $|z|=1$ percorrida uma vez em sentido directo. A função integranda é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0,\ -3\mathrm{i},\ 3\mathrm{i}\}$; dos pontos onde a função não é analítica apenas 0 pertence à região $|z|<1$. Assim

$$\oint_\gamma \frac{\cos z}{z^3+9z}dz = \oint_\gamma \frac{\frac{\cos z}{z^2+9}}{z}dz = 2\pi\mathrm{i}\ \frac{\cos z}{z^2+9}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{9}$$

onde utilizámos a fórmula integral de Cauchy e o facto de a função $f(z)=\frac{\cos z}{z^2+9}$ ser analítica num aberto, simplesmente conexo contendo γ (por exemplo $|z|<2$),

- Derivação de uma função analítica

Sendo f uma função analítica num aberto simplesmente conexo D. Podemos conjecturar que a derivada de f se pode calcular assim:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{d}{dz}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw \ \ =^* \ \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{d}{dz}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

A igualdade que indicámos por $=^*$, embora sendo verdadeira, não tem justificação simples. Vejamos como se pode, neste momento, provar esta *fórmula integral de Cauchy generalizada* a partir da propriedade de holomorfia de f.

Sendo $z\in D$ arbitrário e f analítica em D, para qualquer curva de Jordan, γ, contida em D, percorrida em sentido directo e tal que $z\in$ int γ, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

Em particular, considerando $r>0$ de forma a que $D(z,r)\subset D$, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r} \frac{f(w)}{w-z}dw$$

onde a circunferência é percorrida uma vez em sentido directo. Então, usando a definição de derivada

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi h\mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r}\Big(\frac{f(w)}{w-(z+h)} - \frac{f(w)}{w-z}\Big)dw \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r} f(w)\frac{1}{(w-(z+h))(w-z)}dw \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r} f(w)\frac{1}{(w-(z+h))(w-z)}dw = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r} f(w)\frac{1}{(w-z)^2}dw$$

Para tal, vamos mostrar que

$$M(h) = \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r} f(w)\frac{1}{(w-(z+h))(w-z)}dw - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|w-z|=r} f(w)\frac{1}{(w-z)^2}dw\right|$$

converge para 0 quando $h \to 0$. Assim

$$\begin{aligned} M(h) &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|w-z|=r} |f(w)|\frac{|h|}{|w-z|^2|w-(z+h)|}|dw| \\ &\leq \frac{M|h|}{2\pi r^2}\oint_{|w-z|=r} \frac{1}{|w-(z+h)|}|dw| \end{aligned}$$

onde M denota o máximo de $|f|$ na circunferência $|w-z|=r$. Atendendo a que

$$|w-(z+h)| \geq \Big||w-z|-|h|\Big|,$$

e tomando o limite quando $h \to 0$:

$$\begin{aligned} M(h) &\leq \frac{M|h|}{2\pi r^2\Big|r-|h|\Big|}\oint_{|w-z|=r} |dw| \\ &= \frac{M|h|}{r\Big|r-|h|\Big|} \to 0 \quad \text{quando} \quad h \to 0, \end{aligned}$$

como se queria mostrar.

Demonstrámos assim que se f é analítica em D, a sua derivada satisfaz a fórmula

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}dw$$

para qualquer curva de Jordan γ em D percorrida em sentido directo e tal que $z \in \operatorname{int}\gamma$. Este procedimento pode agora ser repetido sucessivamente, por forma para provar a existência de derivadas de qualquer ordem de f.

Através do conceito de série de potências, que introduziremos na secção seguinte, daremos uma prova mais simples e mais geral deste resultado, no sentido em que também iremos provar que as derivadas de qualquer ordem de f existem e são dadas por:

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{2}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}dw, \\ f'''(z) &= \frac{3\cdot 2}{2\pi \mathrm{i}}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^4}dw, \\ &\vdots \end{aligned}$$

para qualquer curva de Jordan γ em D percorrida em sentido directo e tal que $z \in \operatorname{int}\ \gamma$. Note que as fórmulas para as derivadas de f são obtidas derivando sucessivamente debaixo do sinal de integral[6]:

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{d^n}{dz^n}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw$$

[6] Como vimos acima, embora isto seja uma boa mnemónica não serve de demonstração.

- Fórmula Integral de Cauchy Generalizada

Nas mesmas condições da Fórmula integral de Cauchy, tem-se que para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ está bem definida, é analítica em D e satisfaz a fórmula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

para qualquer $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$.

Exemplo:

1. Pretendemos calcular o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4} dz$$

onde se supõe que a curva é percorrida uma vez em sentido directo. Começamos por observar que a função $\frac{e^z}{(z-1)^4}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, pelo que não é analítica na região interior à curva, e como tal não é aplicável o Teorema de Cauchy. Consideremos a função $f(z) = e^z$, que é uma função inteira; para $z_0 = 1$ (que pertence à região interior à curva) estamos em condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy generalizada para a derivada de ordem $n = 3$. Assim

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4} dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{3!} \left(e^z\right)''' \Big|_{z=1} = \frac{e\pi\mathrm{i}}{3}$$

2. Pretendemos calcular o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+3)}{z^2(z^2+9)} dz$$

onde se supõe que a curva é percorrida uma vez em sentido directo e $\log z$ representa o valor principal do logaritmo. A função $f(z) = \frac{\log(z+3)}{z^2(z^2+9)}$ está definida em $\mathbb{C} \setminus \{-3\mathrm{i}, 3\mathrm{i}, -3, 0\}$ e é analítica em

$$\mathbb{C} \setminus \Big(\{0, 3\mathrm{i}, -3\mathrm{i}\} \cup \{xe^{\mathrm{i}\pi} \ : \ x \leq -3\}\Big)$$

Considere-se $D = \{z \ : \ |z| < \frac{5}{2}\}$. Verifica-se que D é aberto, simplesmente conexo, contém a curva no seu interior. Definindo-se

$$f(z) = \frac{\log(z+3)}{z^2+9} \ ,$$

pelo que vimos acima, f é analítica em D. Então, e usando a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 1,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\log(z+3)}{z^2(z^2+9)} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\frac{\log(z+3)}{z^2+9}}{z^2} = 2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{\log(z+3)}{z^2+9}\Big)'\Big|_{z=0} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{27}$$

3. Pretendemos calcular o valor do integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz$$

em que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função de domínio $\mathbb{C}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) = y^3 - x^3 + 3xy^2 - 3x^2y \ ,$$

e a curva é percorrida uma vez em sentido horário. Atendendo a que

- ◇ $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
- ◇ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(- 3x^2 + 3y^2 - 6xy\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(3y^2 + 6xy - 3x^2\Big) = 0$$

concluimos que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$ pelo que $f = u + \mathrm{i}v$ é uma função inteira sendo v uma harmónica conjugada de u em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, visto que 0 pertence à região interior da circunferência $|z| = 1$, estamos em condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 2

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{2!} f''(0)$$

sendo que o sinal decorre da orientação da curva. Note-se que a analiticidade de f permite, utilizando as equações de Cauchy-Riemann, determinar $f''(0)$ sem ter de conhecer explicitamente a parte imaginária de f. De facto, para qualquer $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \Big(- 3x^2 + 3y^2 - 6xy\Big) - \mathrm{i}\Big(3y^2 + 6xy - 3x^2\Big)$$

Usando as notações $\tilde{u} =$Re f' e $\tilde{v} =$Im f', então

$$\begin{aligned} f''(z) &= \Big(f'(z)\Big)' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(- 3x^2 + 3y^2 - 6xy\Big) + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\Big(- 3y^2 - 6xy + 3x^2\Big) \\ &= -6x - 6y + \mathrm{i}(-6y + 6x) \end{aligned}$$

Finalmente

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^3} dz = -\pi \mathrm{i}\Big(- 6x - 6y + \mathrm{i}(-6y + 6x)\Big)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

Consequências da Fórmula Integral de Cauchy

1. **Teorema de Morera**
   Se $D \subset \mathbb{C}$ é aberto e $f : D \to \mathbb{C}$ é contínua e

$$\oint_{\gamma} f(z)\ dz = 0$$

para qualquer curva fechada seccionalmente regular, γ, contida em D, então f é analítica em D.

Demonstração:

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo (**a)** é equivalente a **b)**), a função f é primitivável em D. Assim existe uma função analítica, F, tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D$. A fórmula integral de Cauchy permite concluir que, sendo F analítica em D, F' é tambem analítica em D. Conclui-se que f é analítica em D.

□

2. **Teorema de Liouville**

   Se f é uma função inteira e limitada então f é constante.

   Demonstração:

   Dado que f é inteira, a Fórmula integral de Cauchy permite concluir que f' é inteira e para todo $z \in \mathbb{C}$ se tem
$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$
   onde a circunferência de centro em z e raio $R > 0$ arbitrário, é percorrida uma vez em sentido positivo. Então
$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|w-z|=R} \left| \frac{f(w)}{(w-z)^2} \right| dw \end{aligned}$$
   Por outro lado, visto f ser limitada, existe $M > 0$ para o qual
$$|f(z) \leq M \qquad , \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$
   Então
$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|w-z|=R} \frac{M}{R^2} dw = \frac{M}{r}$$
   Visto R ser arbitrário, podemos considerá-lo tão grande quanto se queira ($R \to \infty$), e assim concluir
$$|f'(z)| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |f'(z)| = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 0$$
   pelo que f é constante em $\mathbb{C}$.

□

3. **Teorema Fundamental da Álgebra**

   Seja $P(z)$ um polinómio não constante em $\mathbb{C}$. Então existe $\chi \in \mathbb{C}$ tal que $P(\chi) = 0$.

   Demonstração:

   Argumentando por contradição, vamos supor que tal χ não existe, isto é
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad P(z) \neq 0$$
   o que implica de imediato que a função $1/P(z)$ é inteira. Por outro lado, visto $|P(z)| \to \infty$ quando $|z| \to \infty$, existe $R > 0$ tal que
$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| < 1 \qquad \text{se} \qquad |z| > R \tag{5.4}$$

e, tendo em conta que $1/P(z)$ é contínua no conjunto compacto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ — pois $P(z)$ não tem zeros — o teorema de Weierstrass assegura a existência de $M > 0$ tal que

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| < M \qquad \text{se} \qquad |z| \leq R \tag{5.5}$$

As desigualdades (5.4) e (5.5) permitem afirmar que $1/P(z)$ é limitada em $\mathbb{C}$. Pelo Teorema de Liouville conclui-se que $1/P(z)$ é constante, o que contradiz a hipótese do teorema.

□

4. **Desigualdade de Cauchy**

Se f é uma função analítica num conjunto aberto e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ e escolha-se $r > 0$ tal que $\{z : |z - z_0| = r\} \subset D$. Então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M\, n!}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

sendo $M \in \mathbb{R}^+$ o máximo de $|f(z)|$ em $B_r(z_0)$.

Capítulo 6

Sucessões e Séries de Números Complexos

6.1 Sucessões de Números Complexos

Uma sucessão de números complexos, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma aplicação

$$\mathbb{N} \ni n \;\mapsto\; z_n = x_n + \mathrm{i}y_n \in \mathbb{C},$$

ou seja, uma aplicação (ou função) que a cada número natural, n, faz corresponder um e um só número complexo $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$. É costume representar uma sucessão por (z_n) ou ainda, mais abreviadamente, pelo seu *termo geral*, z_n. As sucessões $x_n = \operatorname{Re} z_n$ (a *parte real* de z_n) e $y_n = \operatorname{Im} z_n$ (a *parte imaginária* de z_n) são sucessões reais.

A sucessão z_n diz-se *limitada* se existe um número real positivo M tal que $|z_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Se $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ então

z_n é limitada em $\mathbb{C}$ sse x_n e y_n são limitadas em $\mathbb{R}$.

Exemplos:

1. A sucessão $z_n = \dfrac{1}{\mathrm{i}n}$ é limitada, visto que $|z_n| = \frac{1}{n} \le 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
2. A sucessão $z_n = \dfrac{n+2\mathrm{i}}{n}$ é limitada, pois $|z_n| = \sqrt{1+\frac{4}{n^2}} \le \sqrt{5}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
3. A sucessão $z_n = e^{\mathrm{i}n}$ é limitada, pois $|z_n| = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Limite de uma sucessão. Sucessão convergente:

A sucessão z_n diz-se *convergente* para $L \in \mathbb{C}$, usando-se a notação

$$L = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim z_n \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad z_n \to L$$

se e só se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } n \ge N \text{ então } |z_n - L| < \epsilon.$$

Esta definição significa que dado qualquer erro $\epsilon > 0$, existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ a partir da qual todos os termos da sucessão (os termos $z_{N+1}, z_{N+2}, \ldots$) são aproximações do limite, L, com erro inferior a ϵ.

Exemplos:

1. A sucessão $z_n = \dfrac{\mathrm{i}^n}{n^3}$ é convergente e o seu limite é 0, visto que para qualquer $\epsilon > 0$

$$\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n^3}\right| = \frac{1}{n^3} < \epsilon \quad \text{para} \quad n > \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$$

   A definição de convergência é verificada para qualquer $\epsilon > 0$ tomando $N = N(\epsilon) > 1/\sqrt[3]{\epsilon}$.

2. A sucessão $z_n = \dfrac{n+2\mathrm{i}}{n}$ é convergente e o seu limite é 1, visto que para qualquer $\epsilon > 0$

$$\left|\frac{n+2\mathrm{i}}{n} - 1\right| = \left|\frac{2\mathrm{i}}{n}\right| = \frac{2}{n} < \epsilon \quad \text{para} \quad n > \frac{2}{\epsilon}$$

   A definição de convergência é verificada para qualquer $\epsilon > 0$ tomando $N = N(\epsilon) > 2/\epsilon$.

As propriedades seguintes são consequências quase imediatas das definições anteriores.

Teorema:
Sendo (z_n) uma sucessão complexa convergente, então

1. A sucessão (z_n) é limitada.
2. O seu limite é único.
3. Se (w_n) é uma sucessão limitada e $\lim_n z_n = 0$ então $\lim_n (z_n w_n) = 0$.

Diz-se que z_n é uma *sucessão de Cauchy* se e só se para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{se } \ n, m \geq N \ \text{ então } \ |z_n - z_m| < \epsilon.$$

Esta definição é equivalente a:

$$\lim_{n,m\to+\infty} \big(z_n - z_m\big) = 0$$

.

Prova-se que uma sucessão complexa é convergente se e só se é uma sucessão de Cauchy.

Listamos em seguida algumas propriedades dos limites de sucessões complexas convergentes, que nos permitem utilizar a ́algebra de limites conhecida das sucessões de termos reias convergentes.

Propriedades:
Se (z_n) e (w_n) são sucessões complexas convergentes, então

1. Se $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ e $L = A + \mathrm{i}B$ então

$$L = \lim_{n\to\infty} z_n \Leftrightarrow A = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ e } B = \lim_{n\to\infty} y_n$$

2. $(\overline{z}_n)$ é convergente e $\lim \bar{z}_n = \overline{\lim z_n}$;
3. A sucessão real $(|z_n|)$ é convergente e $\lim |z_n| = |\lim z_n|$.
4. $(z_n + w_n)$ é convergente e $\lim(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n$;
5. $(z_n - w_n)$ é convergente e $\lim(z_n - w_n) = \lim z_n - \lim w_n$;

6. $(z_n w_n)$ é convergente e $\lim(z_n w_n) = \lim z_n \lim w_n$;
7. se adicionalmente $\lim w_n \neq 0$, (z_n/w_n) é convergente e $\lim(z_n/w_n) = \lim z_n / \lim w_n$.

Limite infinito
Se (z_n) é uma sucessão complexa, definimos

$$\lim_n z_n = \infty \quad \text{sse} \quad \forall M > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n > N \ \Rightarrow \ |z_n| > M$$

Não entraremos em detalhe acerca do significado de limite infinito em $\mathbb{C}$, no entanto é fácil de demonstrar que $\lim_n z_n = \infty$ é equivalente a cada uma das afirmações:

- $\lim_n |z_n| = \infty$
- $\lim_n \dfrac{1}{z_n} = 0$

Observa-se que se pelo menos uma das sucessões (Re z_n) ou (Im z_n) tende para infinito, então a sucessão (z_n) terá também limite infinito. Porém, o recíproco pode não se verificar.

Tal como no caso real, a álgebra de limites não é aplicável quando pelo menos uma das sucessões converge para infinito.

Exemplo:

Ex. 1 As sucessões $(ne^{i\pi n})$ e $(n + \frac{\mathrm{i}}{n})$ convergem para ∞, tendo em conta que:

$$\lim_n |ne^{i\pi n}| = \lim_n n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_n \mathrm{Re}\,(n + \frac{\mathrm{i}}{n}) = \lim_n n = \infty$$

Ex. 2 Progressão Geométrica de razão z

Para $z \in \mathbb{C}$ fixo, define-se a progressão geométrica de razão z como sendo a sucessão cujo termo geral é z^n; ou seja, o seu conjunto de termos é:

$$\{z, \ z^2, \ z^3, \ \ldots, \ z^n, \ \ldots\}$$

Escrevendo os termos da progressão na forma trigonométrica, $z^n = |z|^n e^{\mathrm{i}n \arg z}$, pode-se concluir que:

$$\lim_{n \to +\infty} z^n = \begin{cases} 0 & \text{se} \ \ |z| < 1 \\ \infty & \text{se} \ \ |z| > 1 \\ 1 & \text{se} \ \ z = 1 \end{cases}$$

Se $|z| = 1$ e $z \neq 1$, então z^n não tem limite (finito ou infinito).

6.2 Séries Numéricas

Dada uma sucessão de números complexos, z_n, define-se formalmente *série de números complexos* ou *série numérica* como a "soma":

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \tag{6.1}$$

Os números z_1, z_2 , ..., denominam-se *termos* da série (6.1); a sucessão $z_n \in \mathbb{C}$ diz-se o *termo geral* (ou termo de ordem n) da série (6.1). Note-se que (6.1) designa uma "soma de uma infinidade de termos". Através da definição de limite de sucessões, introduzida na secção anterior, é possível dar um significado concreto a este tipo de "somas".

Define-se, associada à série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, a sucessão das somas parciais $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$, por

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 \\
S_2 &= z_1 + z_2 \\
S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\
&\vdots \\
S_N &= z_1 + z_2 + \ldots + z_N = \sum_{n=1}^{N} z_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Note-se que, no termo geral escrito na forma $S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n$, n é variável muda.

Definição: (Natureza da série)

- Se a sucessão das somas parciais S_N é convergente em $\mathbb{C}$, isto é, se existe $S \in \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S$$

  a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diz-se *convergente* e

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

  S é denominado por a *soma da série*.

- Se a sucessão das somas parciais S_N não converge em $\mathbb{C}$ (S_N não tem limite ou tem limite infinito) a série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ diz-se *divergente*.

Proposição

A natureza de uma série não depende do valor dos seus primeiros termos, ou seja:

$$\forall p,\, q \in \mathbb{N}_0, \text{ as séries } \sum_{n=p}^{\infty} z_n \text{ e } \sum_{n=q}^{\infty} z_n \text{ têm a mesma natureza.}$$

6.3 Série Geométrica

Para cada $z \in \mathbb{C}$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ denomina-se *série geométrica de razão* z. Para $z = 1$, a série diverge. Para $z \neq 1$, a correspondente sucessão das somas parciais é dada por:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}.$$

Como $z^{N+1} \to 0$ para $|z| < 1$ e z^{N+1} não converge em $\mathbb{C}$ quando $|z| \geq 1$ (com $z \neq 1$), conclui-se que:

- Se $|z| < 1$ a série geométrica de razão z é convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \left(\sum_{n=p}^{\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z} \right)$$

- Se $|z| \geq 1$ a série geométrica de razão z é divergente.

6.4 Resultados Gerais sobre Convergência de Séries Complexas

- *Condição necessária à convergência de uma série*

$$\text{Se a série } \sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ é convergente então } \lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

- Como consequência directa desta propriedade (tomando o contra-recíproco), tem-se:

$$\text{Se } \lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \text{ então a série } \sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ é divergente.}$$

  Chama-se a atenção para o facto de que $z_n \to 0$ não implica que a série de termo geral z_n seja convergente.

- A série complexa $\sum_{n}^{\infty} z_n$ é convergente sse as séries reais $\sum_{n}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ e $\sum_{n}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$ são ambas convergentes e

$$\sum_{n}^{\infty} z_n = \sum_{n}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + \mathrm{i} \sum_{n}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

- *Linearidade.* Se as séries $\sum_{n}^{\infty} z_n$ e $\sum_{n}^{\infty} w_n$ são convergentes para as somas S e T, respectivamente, então

  ◇ a série $\sum_{n}^{\infty} (z_n + w_n)$ é convergente e a sua soma é $S + T$.

◇ para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, a série $\sum_{n}^{\infty}(\lambda z_n)$ é convergente e a sua soma é λS.

- *Critério de Cauchy.*

A série $\sum_{n}^{\infty} z_n$ é convergente
sse
a sucessão das somas parciais associada é uma sucessão de Cauchy
sse
para qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:
para todos os $n, m > N$, $|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m| < \epsilon$.

6.4.1 Série Harmónica

A série harmónica é dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Note-se que a sucessão das somas parciais desta série verifica:

$$S_{2N} - S_N = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} = N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

para qualquer $N \in \mathbb{N}$. Em consequência, (S_N) não satisfaz o critério de Cauchy (basta tomar $\epsilon < \frac{1}{2}$). Por isso, a série harmónica é divergente.

6.4.2 Séries de Mengoli

Uma série de Mengoli (ou série telescópica) é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n - z_{n+1}\right)$$

em que $z_n \in \mathbb{C}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. A sua sucessão das somas parcias reduz-se a

$$S_N = z_1 - z_{N+1},$$

pelo que a série converge sse existe $\lim_{n\to\infty} z_n$. Nesse caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n - z_{n+1}\right) = z_1 - \lim_{n\to\infty} z_n$$

6.4.3 Convergência Absoluta

A série $\sum z_n$ diz-se *absolutamente convergente* se a série real $\sum |z_n|$ convergir. Costuma-se designar $\sum |z_n|$ como a série dos módulos (de $\sum z_n$).

A série $\sum z_n$ diz-se *simplesmente convergente* se for convergente e a série dos seus módulos for divergente i.e., se a série $\sum z_n$ convergir e a série $\sum |z_n|$ divergir. A partir do critério de Cauchy, deduz-se a:

Proposição: (critério da convergência absoluta)
Toda a série absolutamente convergente é convergente.

O resultado anterior mostra que a natureza de certas séries complexas pode ser estudada à custa da teoria das series de termos reais não negativos.

Para uma revisão dos conceitos e resultados essenciais sobre as séries de termos reais não negativos, aconselha-se a leitura do apêndice A.

Capítulo 7

Séries de Potências

7.1 Definição e Raio de Convergência

Para $z_0 \in \mathbb{C}$ e a_n uma sucessão de termos complexos define-se a *série de potências de* $z - z_0$ (ou série de potências centrada em z_0) por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots \tag{7.1}$$

Os termos da sucessão a_n denominam-se *coeficientes* da série e z_0 é o seu centro. Para cada $z \in \mathbb{C}$ a série poderá ou não convergir, pelo que será adequado definir o conjunto:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \quad : \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ converge} \right\},$$

Este conjunto é denominado *região de convergência* de (7.1).

Pela mudança de variável $w = z - z_0$, podemos reduzir o estudo da natureza de (7.1) ao caso em que $z_0 = 0$, que é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

Qual é a forma do domínio de convergência de uma série de potências? O seguinte resultado permite obter uma resposta para esta questão.

Teorema de Abel
Considere-se a série de potências centrada em z_0 e de coeficientes c_n. Então:

a) Se existe $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi - z_0)^n$ converge, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente em todos os valores de z para os quais $|z-z_0| < |\xi - z_0|$.

b) Se existe $\bar{\xi} \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\bar{\xi} - z_0)^n$ diverge, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ diverge em todos os valores de z para os quais $|z-z_0| > |\bar{\xi} - z_0|$.

Demonstração: como vimos, basta provar o resultado para caso $z_0 = 0$, isto é, para as séries do tipo $\sum a_n z^n$.

a) Supondo que existe um ponto $z = \xi$ onde a série $\sum a_n z^n$ converge, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \xi^n = 0$. A existência deste limite implica, em particular, que $a_n \xi^n$ é uma sucessão limitada, ou seja:

$$\text{existe} \quad M > 0 \quad \text{tal que} \quad |a_n \xi^n| \leq M \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Tomando qualquer valor de z que verifique $|z| < |\xi|$, define-se $r = \dfrac{|z|}{|\xi|}$. Assim, $0 < r < 1$. Desta forma:

$$|a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n||\xi|^n \frac{|z|^n}{|\xi|^n} = |a_n \xi^n| \left(\frac{|z|}{|\xi|}\right)^n \leq M r^n \qquad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Note que a série $\sum M r^n = M \sum r^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $r < 1$. Pelo critério geral de comparação, a série $\sum |a_n z^n|$ também converge; logo $\sum a_n z^n$ converge absolutamente para $|z| < |\xi|$.

b) Supondo que existe $z = \bar{\xi}$ onde a série $\sum a_n z^n$ diverge, então a série terá que divergir para $|z| > |\bar{\xi}|$. Pois, caso contrário — se existisse $\hat{z}$, com $|\hat{z}| > |\bar{\xi}|$, onde a série convergisse — como $|\bar{\xi}| < |\hat{z}|$, pela alínea (a) a série $\sum a_n z^n$ convergiria **absolutamente** em $z = \bar{\xi}$, o que contradiz a hipótese. $\square$

O *raio de convergência*, R, de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ define-se por:

$$R = \sup \left\{ \rho \in [0, +\infty[\, : \, \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ \text{converge em } |z - z_0| < \rho \right\}$$

R está bem definido, pois o conjunto acima nunca é vazio e $R \geq 0$. De notar que esse conjunto pode ser não limitado; nesse caso, $R = \infty$.

Utilizando o teorema de Abel, conclui-se facilmente o seguinte (porquê?):

Teorema: (região de convergência de uma série de potências)

Considere-se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ e seja R o seu raio de convergência. Então:

a) A série converge absolutamente no disco $\{z \ : \ |z - z_0| < R\}$.

b) A série diverge na região $\{z \ : \ |z - z_0| > R\}$.

O *disco de convergência* da série de potências é definido como sendo o interior da sua região de convergência, ou seja, a região dada por $|z - z_0| < R$.

Apoiando-nos nos critérios de convergência das séries de termos não negativos e no teorema de Abel, podemos obter fórmulas para o cálculo do raio de convergência de (7.1). Assim:

O raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ é dado por:

- $R = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, caso este limite exista.
- $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, caso este limite exista.
- $\dfrac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (**Teorema de Cauchy-Hadamard**).

Para mostrar que, caso o limite exista, $R = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, usamos o critério de D'Alembert. Mais uma vez, estudaremos apenas o caso $z_0 = 0$. Assim:

$$\frac{|a_{n+1}\, z^{n+1}|}{|a_n\, z^n|} = |z| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|z|}{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

Supondo que existe $R \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, então:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}\, z^{n+1}|}{|a_n\, z^n|} = \frac{|z|}{\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{|z|}{R}.$$

Para se ter $L < 1$ — caso em que, pelo critério de D'Alembert a série de potências é absolutamente convergente — então é necessário que $|z| < R$. Tomando $L > 1$ conclui-se que para $|z| > R$ a série não converge absolutamente.

Além disso, a série diverge sempre para $|z| > R$. Caso contrário, isto é, se convergisse para certo $\hat{z}$, com $|\hat{z}| > R$, então pelo teorema de Abel convergiria absolutamente em qualquer z tal que $R < |z| < |\hat{z}|$, o que contradiz a conclusão do parágrafo anterior!

Conclui-se que o raio de convergência da série $\sum a_n z^n$ é R. Por mudança de variável $w = z - z_0$, obtém-se o resultado para qualquer série de potências de $z - z_0$.

Note-se que, em teoria, a fórmula do Teorema de Cauchy-Hadamard é de aplicabilidade geral. Pode, contudo, não ser fácil de utilizar na prática; basta pensar em exemplos onde o conjunto dos sublimites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ é difícil de determinar.

Exemplos:

1. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2\mathrm{i})^n}{n(5\mathrm{i})^n}$. Por ser uma série de potências de centro em $2\mathrm{i}$ e coeficientes $a_n = \frac{1}{n(5\mathrm{i})^n}$, o seu disco de convergência será

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 2\mathrm{i}| < R\}$$

em que R é dado por (porque o limite existe)

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_n \frac{5(n+1)}{n} = 5$$

ou seja, o disco de convergência é $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 2\mathrm{i}| < 5\}$.

2. Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{i}n)^n z^n$. Por ser uma série de potências de centro em 0 e coeficientes $a_n = (\mathrm{i}n)^n$, o seu disco de convergência será

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < R\}$$

em que R é dado por (porque o limite existe)

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$$

O disco de convergência desta série é $\emptyset$ e o sua região de convergência é $\{0\}$.

3. Considere-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} n(-\mathrm{i})^n (z+\mathrm{i})^{2n}$ Mais uma vez, o seu disco de convergência será

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+\mathrm{i}| < R\}$$

dado que o centro da série é $-\mathrm{i}$. Visto que no desenvolvimento só ocorrem potências de expoente par, os coeficientes da série são dados por

$$a_n = \begin{cases} n(-\mathrm{i})^n & \text{para} \quad n \ \text{par} \\ 0 & \text{para} \quad n \ \text{impar} \end{cases}$$

e é fácil de perceber que não existem $\lim_n \left| a_n / a_{n+1} \right|$ e $\lim_n 1/\sqrt[n]{|a_n|}$. Então

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sup\{\lim_n \sqrt[n]{n}, \lim_n 0\}} = 1$$

Conclui-se que a região é $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z+\mathrm{i}| < 1\}$. Em alternativa, poderemos considerar $w = -\mathrm{i}(z+\mathrm{i})^2$ e estudar a região de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} n w^n$. Dado que

$$\lim_n \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

podemos concluir que esta série converge em $\{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| < 1\}$, o que implicará que a série inicial é convergente para todos os valores de z tais que

$$|-\mathrm{i}(z+\mathrm{i})^2| < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad |z+\mathrm{i}| < 1 \ .$$

7.2 Integração e Derivação de Séries de Potências

Recordamos que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ com raio de convergência R é absolutamente convergente em para $|z-z_0| < R$, pelo que a série define uma função complexa de varíavel complexa em $D(z_0, R)$.

Teorema: (Integração de uma série de potências)

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n \, dz \tag{7.2}$$

para qualquer curva regular, γ, contida em $D(z_0, R)$, onde R é o raio de convergência da série de potências.

Nota: (7.2) constitui uma fórmula de integração termo a termo de uma série de potências (no caso presente). [1].

Demonstração: Fazendo previamente (se $z_0 \neq 0$) a mudança de variável $w = z - z_0$, basta provar o resultado no caso $z_0 = 0$.

Seja $\rho < R$ tal que a curva γ está contida em $D(0, \rho)$. Note que ρ está bem definido pois, pelo teorema de Weierstrass aplicado à função contínua $d(z, w) = |z - w|$, com z em γ e w em $|z - z_0| = R$ o mínimo de d existe e é maior que zero. Então:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N} a_n \int_\gamma z^n\, dz - \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\, dz\right| &= \left|\int_\gamma \sum_{n=0}^{N} a_n z^n\, dz - \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\, dz\right| \\
&= \left|\int_\gamma \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\, dz\right| \\
&\leq \int_\gamma \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n\right| |dz| \leq \int_\gamma \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n|\right) |dz|
\end{aligned}$$

Para z na curva $\gamma \subset D(0, \rho)$, $|z| < \rho$, pelo que $|a_n z^n| = |a_n||z|^n < |a_n|\rho^n = |a_n \rho^n|$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n|\right) |dz| &\leq \int_\gamma \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n \rho^n|\right) |dz| = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n \rho^n|\right) \underbrace{\int_\gamma |dz|}_{=L(\gamma)} \\
&\leq L(\gamma) \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n \rho^n| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

pois o último termo é o resto de uma série de potências de ρ menor que o seu raio de convergência, R. Então

$$\lim_{N\to\infty} \left|\sum_{n=0}^{N} a_n \int_\gamma z^n\, dz - \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\, dz\right| = 0.$$

□

A fórmula de integração termo a termo (7.2) de uma série de potências centrada em z_0 pode-se escrever assim:

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w - z_0)^n\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (w - z_0)^n\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\Big((b - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1}\Big),$$

onde a e b representam os pontos inicial e final de γ, respectivamente.

[1] Fórmulas deste tipo são muito importantes nas aplicações. Note que a integração termo a termo dos somatórios (que têm um número finito de termos) é obviamente válida, pois decorrem da linearidade do integral. Para séries, contudo, é necessário estudar a convergência da série dos integrais para provar a validade de (7.2).

Tal como com a integração, também se prova que uma série de potências se pode derivar termo a termo.

Teorema: (Derivação termo a termo de uma série de potências)
Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{em} \quad |z - z_0| < R$$

Então, para qualquer z no disco de convergência da série:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

Demonstração: Tal como no teorema anterior podemos, sem perda de generalidade, provar apenas o resultado para as séries de potências de z. Assim, sejam

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

e R o raio de convergência de ambas as séries (justifique que têm o mesmo raio de convergência). Sejam z e $z+h$ tais que $|z|$ $|z+h|$ são menores que um certo $\rho \in]0, R[$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \big[\underbrace{(z+h)^n - z^n}_{=0 \text{ se } n=0} \big] - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

Em seguida, usaremos a proposição seguinte para estimar as diferenças $(z+h)^n - z^n$, e cuja prova adiamos até ao fim desta.

Proposição: Para $|z|$ e $|z+h|$ menores que $\rho > 0$ e $n \geq 1$:

$$(z+h)^n - z^n = n z^{n-1} h + h^2 R_n(z,h),$$

onde $R_1(z,h) = 0$ e

$$|R_n(z,h)| \leq \frac{(n-1)n}{2} \rho^{n-2} \qquad \text{para } n \geq 2 \tag{7.3}$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{h} \big(n z^{n-1} h + h^2 R_n(z,h) \big) - n z^{n-1} \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n h \underbrace{R_n(z,h)}_{=0 \text{ se } n=1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n h \, R_n(z,h),
\end{aligned}$$

pelo que:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)\right| &\leq |h|\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,|R_n(z,h)| \\ &\leq |h|\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\frac{(n-1)n}{2}\rho^{n-2} = M|h| \to 0 \quad \text{quando} \quad h\to 0\end{aligned}$$

pois a série de potências de ρ acima obtida tem o mesmo raio de convergência que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (exercício). Logo, e sendo $\rho < R$, a série converge para um certo número real não negativo, que designámos de M. Assim

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-g(z)=0,$$

como se pretendia provar. □

Demonstração (da Proposição):

É óbvio que $R_1(z,h)=0$.

Para $n\geq 2$ provamos o resultado por indução. Começando pelo caso $n=2$, $(z+h)^2-z^2=2zh+h^2$, pelo que $R_2(z,h)$ é constante e igual a 1, o que claramente satisfaz (7.3).

Admitindo agora a validade de (7.3) para um certo $n\in\mathbb{N}$, e denotando abrevidamente $R_n(z,h)$ por R_n:

$$\begin{aligned}(z+h)^{n+1}-z^{n+1} &= (z+h)^n(z+h)-z^{n+1} = (z^n+nz^{n-1}h+h^2R_n)(z+h)-z^{n+1} \\ &= z^{n+1}+nz^nh+h^2zR_n+z^nh+nz^{n-1}h^2+h^3R_n-z^{n+1} \\ &= (n+1)z^nh+h^2\big[\underbrace{zR_n+nz^{n-1}+hR_n}_{=R_{n+1}}\big].\end{aligned}$$

Tendo em conta que $|z|,|z+h|<\rho$, e estimando $|R_{n+1}|$ a partir do majorante de $|R_n|$ providenciado pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned}|R_{n+1}| &= \big|(z+h)R_n+nz^{n-1}\big| \leq \underbrace{|z+h|}_{\leq\rho}|R_n|+\underbrace{n|z|^{n-1}}_{\leq n\rho^{n-1}} \\ &\leq \rho\frac{(n-1)n}{2}\rho^{n-2}+n\rho^{n-1} \leq \frac{n^2-n+2n}{2}\rho^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}\rho^{n-1}.\end{aligned}$$

□

Em consequência do teorema anterior, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ é primitivável no seu disco de convergência e as suas primitivas são dadas por

$$C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}, \qquad \text{onde } C\in\mathbb{C}.$$

Como a derivada de uma série de potências é uma série de potências com o mesmo raio de convergência, se aplicarmos sucessivamente o teorema da derivação termo a termo podemos concluir que a função definida por uma série de potências é indefinidamente diferenciável. Podemos então afirmar o seguinte.

Teorema: Seja $f : A \to \mathbb{C}$, definida em num aberto $A \subset \mathbb{C}$ uma função tal que, para qualquer $z_0 \in A$, existe $R > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{para} \quad |z - z_0| < R.$$

Então f é holomorfa (ou analítica) em A.

Calculando sucessivamente as derivadas de

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
f'(z) &= a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots + na_n(z - z_0)^{n-1} + (n+1)(z - z_0)^n + \cdots \\
f''(z) &= 2!\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3(z - z_0) + \cdots + n(n-1)a_n(z - z_0)^{n-2} + (n+1)n(z - z_0)^{n-1} \cdots \\
f'''(z) &= 3!\, a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(z - z_0)^{n-3} + (n+1)n(n-1)a_{n+1}(z - z_0)^{n-2} + \cdots \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z) &= n!\, a_n + (n+1)n(n-1)\cdots 3 \cdot 2\, a_{n+1}(z - z_0) + \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

A soma da série que representa a derivada de ordem n de $f(z)$ em $z = z_0$ reduz-se ao seu termo constante, pois os restantes termos são potências de $z - z_0$ que se anulam quando $z - z_0 = 0$. Assim sendo:

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{7.4}$$

Iremos na próxima secção provar o recíproco do teorema anterior: que qualquer função analítica (ou holomorfa) em $A \subset \mathbb{C}$ é representável em série de potências numa vizinhança de qualquer ponto $z \in A$. [2]

Numa leitura atenta das duas provas desta secção, poderá verificar que elas procedem a partir de estimativas de certas funções de z, válidas num disco. De facto, pode-se mostrar que a velocidade de convergência de uma série de potências de $z - z_0$ num disco de raio ρ *menor* que o seu raio de convergência pode ser controlada independentemente do valor de z. Esta observação levou, historicamente, à introdução do conceito de convergência uniforme de sucessões de funções e séries. No Apêndice 11.2 pode encontrar um breve resumo deste tópico.

[2] Na terminologia usual da análise matemática, uma função f definida num conjunto aberto A diz-se **analítica (no sentido usual)** se é representável em série de potências em torno de qualquer ponto $\xi \in A$. No contexto da análise complexa, a equivalência entre as noções de função holomorfa e de função localmente representável em série de potências justifica que o conceito usual de **função analítica** é rigorosamente equivalente ao de **função holomorfa**; ou seja, ambos definem o mesmo conjunto de funções.

7.3 Séries de Taylor

7.3.1 Integrais de Cauchy

Seja f uma função contínua na circunferência $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$. Um *integral de Cauchy* é uma função

$$I(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

definida para $|z - z_0| \neq \rho$. Note que se $|z - z_0| = \rho$ então $w - z$ anula-se precisamente no ponto $w = z \in C_\rho$; assim sendo, para $z \in C_\rho$ o integral complexo deixa de estar bem definido.

Note que se f for analítica para $|z - z_0| \leq \rho$ e C_ρ for percorrida no sentido directo, então a fórmula integral de Cauchy é, simplesmente, dada por

$$f(z) = I(z), \qquad \text{para qualquer } z \in D(z_0, \rho).$$

Para obter uma representação em série de potências de $I(z)$ válida para $|z - z_0| < \rho$, vamos em primeiro lugar desenvolver a função $\frac{1}{\omega - z}$ em série de potências de $z - z_0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} \\ &= \frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

A série geométrica de razão $\frac{z-z_0}{w-z_0}$ é convergente pois $|z - z_0| < \rho$ e, como w está em na curva de integração, $|w - z_0| = \rho$. Desta forma:

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|w - z_0|} < 1$$

Assim:

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw$$

Atendendo a que a série geométrica pode ser integrada termo a termo em $D(z_0, \rho)$, então:

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \Big] (z - z_0)^n$$

Resulta assim que

$$I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad \text{com } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw. \tag{7.6}$$

7.3.2 Séries de Potências de Funções Analíticas e Fórmulas Integrais de Cauchy

Seja agora $f : D \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $D \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in A$ e $R > 0$ tais que o disco centrado em z_0 de raio ρ e a sua fronteira, C_ρ, estão contidos em D. Se C_ρ é percorrida no sentido directo, então da fórmula integral de Cauchy resulta que

$$f(z) = I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{7.7}$$

com a_n dado por (7.6). Desta forma, $f(z)$ é uma função representável em série de potências, pelo que é analítica e as suas derivadas de qualquer ordem existem e são analíticas. Como vimos em (7.4), derivando n vezes a série de potências (7.7), obtém-se:

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n \qquad \Rightarrow \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.8}$$

A partir de (7.6) e (7.8) obtém-se a fórmula integral de Cauchy generalizada para discos:

$$f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, d\omega.$$

A versão geral, que enunciámos na Secção 5.5, da fórmula integral de Cauchy generalizada — para derivadas de qualquer ordem e curvas de Jordan arbitrárias — é agora provada por aplicação do teorema de Cauchy generalizado.

7.3.3 Teorema de Taylor

Vimos anteriormente que uma função representável por uma série de potências num disco centrado em z_0 é holomorfa em z_0.

Reciprocamente, vimos na secção anterior que qualquer função holomorfa em z_0 é representável pela série de potências dada pela equação (7.7), com $a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$. Isto prova o resultado que se segue.

Teorema de Taylor:
Seja f uma função analítica num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$. Se $z_0 \in D$, então f admite o desenvolvimento em série de potências de $z - z_0$ dado por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad \text{quando} \quad |z-z_0| < R$$

R é o supremo dos números reais positivos, ρ, para o quais o disco $D(z_0, \rho)$ está contido no domínio de analiticidade de f, isto é, R é a distância de z_0 à fronteira de D.

Nota: conclui-se dos teoremas anteriores que afirmar que uma função f é analítica (ou holomorfa) num ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é **equivalente** a afirmar que $f(z)$ admite uma representação em série de potências de $z - z_0$ válida numa vizinhança de z_0.

A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

denomina.se série de Taylor de f em torno de z_0.

No caso particular $z_0 = 0$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

denomina-se *série de Maclaurin* de f.

Por ser uma série de potências, ela é absolutamemente convergente em $\overline{D(z_0, r)}$ para todos $0 < r < R$ e pode ser integrada e derivada termo a termo. Isto é, se $z \in D(z_0, R)$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} \\ \int_\gamma f(w)\, dw &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!} \left[(z - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

onde γ é uma curva seccionalmente regular contida em $D(z_0, R)$ e a, z são o extremo inicial e final (resp.) de γ. Em consequência, as primitivas da série de Taylor de $f(z)$ em torno de z_0 são

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!} (z - z_0)^{n+1},$$

onde $C \in \mathbb{C}$ é uma constante arbitrária.

Exemplos de Séries de Maclaurin:

- $f(z) = e^z$. Dado que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem $f^{(n)}(z) = e^z$, os coeficientes da série de Maclaurin da função exponencial são

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

  Como o domínio de analiticidade de e^z é $\mathbb{C}$ temos então que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Para qualquer $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n \mathrm{i}^n (1 - (-1)^n)}{n!} = \frac{1}{\mathrm{i}} \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{z^n \mathrm{i}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- De igual modo se obtem, que para qualquer $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

- Para $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} \Big(z^n \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k$$

- Considerando o valor principal do logaritmo

$$\log(1-z) = -\int \frac{1}{1-z}\,dz = -\int \sum_{n=0}^{\infty} z^n dz = -\sum_{n=0}^{\infty} \int z^n dz = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + C$$

este desenvolvimento será válido no maior círculo centrado em 0 onde a função (valor principal) $\log(1-z)$ é analítica. Como o seu domínio de analiticidade é $\mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 1\}$ o domínio de convergência da série é $|z| < 1$. Atendendo a que o valor principal de $\log 1$ é 0, tem-se que

$$\log(1-z)\Big|_{z=0} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} + C\Big|_{z=0} \quad \Leftrightarrow \quad C = 0.$$

Desta forma:

$$\log(1-z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad , \quad |z| < 1$$

- Pretende-se desenvolver a função definida em $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ por

$$f(z) = \operatorname{sen}(\pi \mathrm{i} z) + \frac{z}{z+\mathrm{i}}$$

em série de Taylor em torno de $z_0 = \mathrm{i}$. Para isso, note-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi \mathrm{i} z) &= \operatorname{sen}(\pi \mathrm{i}(z-\mathrm{i}+\mathrm{i})) = \operatorname{sen}(\pi \mathrm{i}(z-\mathrm{i}) - \pi) \\
&= \operatorname{sen}(\pi \mathrm{i}(z-\mathrm{i}))\cos(-\pi) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} \mathrm{i}^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-\mathrm{i})^{2n+1} \\
&= -\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-\mathrm{i})^{2n+1}
\end{aligned}$$

sendo a igualdade válida em $\mathbb{C}$. Por outro lado

$$\frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})+2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\left(1+\frac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^n}(z-\mathrm{i})^n$$

sendo a igualdade válida em $\left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right| < 1$, ou seja, em $|z-\mathrm{i}| < 2$. Por último

$$z = (z-\mathrm{i}) + \mathrm{i}$$

obviamente para todo o $z \in \mathbb{C}$. Então, para todo o $z \in D(\mathrm{i}, 2)$

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-\mathrm{i})^{2n+1} + \Big((z-\mathrm{i})+\mathrm{i}\Big)\frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^n}(z-\mathrm{i})^n \\
&= -\mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-\mathrm{i})^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^{n+1}}(z-\mathrm{i})^{n+1} \\
&\quad + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\mathrm{i})^{n+1}}(z-\mathrm{i})^n
\end{aligned}$$

7.3.4 Zeros de uma Função Analítica

Seja f uma função analítica em $D \subset \mathbb{C}$ aberto. Diz-se que $z_0 \in D$ é um *zero de ordem* p sse

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0$$

Como consequência do Teorema de Taylor, podemos afirmar que:

$$z_0 \text{ é um zero de ordem } p \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned} f(z) &= a_p(z-z_0)^p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \cdots \\ &= (z-z_0)^p\left(a_p + a_{p+1}(z-z_0)^{p+1} + \cdots\right) \qquad \text{para} \quad |z-z_0| < \epsilon, \end{aligned}$$

e onde $a_p = \frac{1}{p!}f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Sendo assim, z_0 é um zero de ordem p de f se e só se f admite uma factorização da forma

$$f(z) = (z-z_0)^p g(z)$$

num disco $|z-z_0| < \epsilon$, onde g é uma função analítica em z_0 e $g(z_0) \neq 0$.

Exemplos:

- A função $f(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1$ tem um zero de ordem 3 em $z_0 = 1$. De facto

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = (z-1)^3 g(z) \quad , \quad g(z) \equiv 1$$

- A função $e^z - 1$ tem um zero de ordem 1 em $z_0 = 0$. De facto

$$e^z - 1 = zg(z) \quad , \quad g(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots$$

- A função $e^z - 1$ tem um zero de ordem 1 em $z_0 = 2k\pi i$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$. De facto, usando a periodicidade da exponencial complexa:

$$e^z - 1 = e^{z-2k\pi \mathrm{i}} - 1 = (z - 2k\pi\mathrm{i})g(z)$$

  com

$$g(z) = 1 + \frac{z-2k\pi\mathrm{i}}{2} + \frac{(z-2k\pi\mathrm{i})^2}{3!} + \frac{(z-2k\pi\mathrm{i})^3}{4!} + \cdots$$

- A função $(e^z - 1)^2$ tem um zero de ordem 2 em $z_0 = 0$. De facto

$$(e^z-1)^2 = z^2 g(z) \quad , \quad g(z) = \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots\right)^2$$

  Note que g é analítica em $\mathbb{C}$. (Porquê?)

Capítulo 8

Séries de Laurent

8.1 Definição e Domínio de Convergência de uma Série de Laurent

Sendo $z_0 \in \mathbb{C}$, a série

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \\ &= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\text{parte regular}} \qquad (8.1)\end{aligned}$$

diz-se uma *série de Laurent* em torno do ponto z_0. Na expressão anterior, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

designa-se por *parte principal* (ou singular) do desenvolvimento (8.1), enquanto a série de potências se designa por *parte regular* de (8.1). A parte regular é, como sabemos, uma função analítica.

Estudemos agora a forma do domínio de convergência de uma série de Laurent (8.1).

Parte regular: trata-se uma série de potências, logo convergente se $|z-z_0| < R$, onde R é o raio de convergência da série.

Parte principal: fazendo a mudança de variável, $w = \frac{1}{z-z_0}$, vemos que se trata da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\, w^n$; se o raio de convergência desta for ρ, ela converge se

$$|w| = \frac{1}{|z-z_0|} < \rho \qquad \Leftrightarrow \qquad |z-z_0| > r, \quad \text{com } r = \frac{1}{\rho}.$$

Assim a série de Laurent converge se $r < |z-z_0| < R$. Admitindo que existe pelo menos um ponto, z, onde a série converge, então $r < R$. A região do plano complexo dada por

$$A(z_0, r, R) = \big\{ z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R \big\},$$

com $0 \le r < R \le \infty$, designa-se por *coroa circular* ou *região anular* centrada em z_0, com raio interior r e raio exterior R. Vimos pois que **o domínio de convergência de uma série de Laurent tem a forma de uma coroa circular**.

8.2 Teorema de Laurent

8.2.1 Série de Laurent de um Integral de Cauchy

Recordamos que um *integral de Cauchy* é uma função

$$I(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_\rho} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

definida para $|z - z_0| \neq \rho$, onde f é (pelo menos) uma função contínua sobre a circunferência $C_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$.

Na subsecção 7.3.1 obtivémos um desenvolvimento em série de potências de $I(z)$ válido no interior da circunferência C_ρ (expressão (7.5)). Pretendemos agora obter um desenvolvimento em série de $I(z)$ válido no exterior de C_ρ. Ora

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{(z-z_0)\left(1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}\right)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}},$$

onde tivemos em conta que $|z - z_0| > \rho$ pelo que $\left|\dfrac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1$.

Assim, fazendo $n = k+1$ e integrando a série (de potências de $w = \frac{1}{z-z_0}$) termo a termo:

$$\begin{aligned} I(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\, dw = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} f(w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}\, dw \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\, dw \right] (z-z_0)^{-n} \end{aligned}$$

Resulta assim que $I(z)$ admite a representação em série de Laurent

$$I(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}, \qquad \text{com } a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\, dw, \tag{8.2}$$

válida em $|z - z_0| > \rho$.

8.2.2 O Teorema de Laurent

Teorema de Laurent:

Se f é analítica na coroa circular $A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, então f pode ser desenvolvida em *série de Laurent* em torno de z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

onde, para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

e γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular contida em $A(z_0, r, R)$, percorrida uma vez no sentido positivo, e tal que $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$.

No teorema de Laurent, podemos tomar os raios interior, r (resp. exterior, R) da região anular $A(z_0, r, R)$ como sendo o ínfimo de todos os $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ (resp., o supremo de todos os $\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$) para os quais f é analítica em $A(z_0, \sigma, \rho)$. Em particular, podemos ter $r = 0$ e $R = \infty$.

Demonstração:

Escolha-se $z \in A(z_0, r, R)$ arbitrário, e sejam r_1, r_2 números reais positivos para os quais $r < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R$. Considerem-se ainda γ_1 e γ_2 as circunferências de centro em z_0 e de raios respectivamente r_1 e r_2, percorridas em sentido directo. Sendo l um segmento de recta unindo γ_1 a γ_2, defina-se

$$C = \gamma_2 + l + (-\gamma_1) + (-l)$$

Aplicando a fórmula integral de Cauchy, tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{I_2(z)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw}_{I_1(z)}$$

Vimos assim que $f(z)$ é igual à diferença de dois integrais de Cauchy: $I_2(z)$ calculado para z no interior de γ_2 — que, como vimos na subsecção 7.3.1, pode ser desenvolvido em série de potências — e $I_1(z)$ calculado para z no exterior de γ_1 — que, como vimos na secção anterior, pode ser desenvolvido em série de Laurent.

Utilizando a representação de $I_2(z)$ em série de potências (7.6) e de $I_1(z)$ em série de Laurent (8.2), então [1].

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} d\omega$$

e

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} d\omega.$$

Note que, pelo teorema de Cauchy generalizado, as circunferências γ_1 e γ_2 foram substituídas por qualquer curva de Jordan, $\gamma \subset A(z_0, r, R)$, percorrida no sentido positivo e contendo z_0 no seu interior. □

Exemplos de Séries de Laurent:

1. Para $z \in A(0, 0, \infty)$ (ou seja $|z| > 0$)

$$\cos \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} = 1 - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4! z^4} + \frac{1}{6! z^6} - \cdots$$

[1] Note que $I_2(z)$ corresponde à parte regular da série de Laurent de $f(z)$ em $A(z_0, r, R)$, enquanto $I_1(z)$ corresponde à parte principal da mesma série.

2. Para $z \in A(0,1,\infty)$ (isto é para $|z| > 1$)

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{-z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = -\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)$$

Note-se que o desenvolvimento em série é convergente, pois $|z| > 1$ implica que $|1/z| < 1$.

3. Sendo $f(z) = \frac{z}{(z-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})}$, vamos determinar todos os possíveis desenvolvimentos em série de f em torno de $z_0 = \mathrm{i}$. Dado que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$ e $z_0 = \mathrm{i}$ iremos ter dois desenvolvimentos; em $A(\mathrm{i},0,1)$ e em $A(\mathrm{i},1,\infty)$. Observe-se que, como f não é analítica em i, nenhum dos desenvolvimentos será uma série de Taylor.

Para $z \in A(\mathrm{i},0,1)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{(z-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})} = \frac{z}{z-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z-2\mathrm{i}} = \frac{z-\mathrm{i}+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{z-\mathrm{i}+\mathrm{i}-2\mathrm{i}} \\ &= \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)\frac{1}{(z-\mathrm{i})-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^{-1}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}} \end{aligned}$$

Dado que estamos a efectuar o desenvolvimento na região $z \in A(\mathrm{i},0,1)$ tem-se que $|z-\mathrm{i}| < 1$ e como tal $\dfrac{1}{1-\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}}$ representa a soma da série geométrica de razão $\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$, e assim

$$f(z) = \frac{1+\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^{-1}}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^{n-1}}{\mathrm{i}^n}$$

Para $z \in A(\mathrm{i},1,\infty)$ também é válido que:

$$f(z) = \frac{1+\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^{-1}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{1-\frac{(z-\mathrm{i})}{\mathrm{i}}}$$

No entanto, para $z \in A(\mathrm{i},1,\infty)$ tem-se que $|z-\mathrm{i}| > 1$ e ao contrário do caso anterior $\dfrac{1}{1-\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}}$ **não** representa a soma da série geométrica de razão $\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$. Porém, tem-se que $\left|\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right| < 1$; para tirar partido desse facto, factorizamos a função como se segue:

$$f(z) = \frac{1+\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^{-1}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{-1}{\frac{(z-\mathrm{i})}{\mathrm{i}}} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}$$

Desta forma, para $z \in A(\mathrm{i},1,\infty)$, a função $\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}$ representa a soma da série geométrica de razão $\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$. Assim,

$$f(z) = \frac{1+\mathrm{i}(z-\mathrm{i})^{-1}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{-1}{\frac{(z-\mathrm{i})}{\mathrm{i}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{(z-\mathrm{i})^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^{n+1}}{(z-\mathrm{i})^{n+2}},$$

sendo que este desenvolvimento é válido para $\left|\frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right| < 1$, ou seja, $|z-\mathrm{i}| > 1$.

Capítulo 9

Singularidades, Resíduos e Teorema dos Resíduos

9.1 Singularidades

Seja f uma função complexa, com domínio de analiticidade $A \subset \mathbb{C}$. Diz-se que f tem uma *singularidade* em $z_0 \in \mathbb{C}$, se $z_0 \notin A$ (f não é analítica em z_0) e para todo $\epsilon > 0$ verifica-se que $D(z_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ (existem pontos numa vizinhança de z_0 onde f é analítica).

A singularidade z_0 diz-se *isolada* se existe $\epsilon > 0$ para o qual f é analítica em

$$A(z_0, 0, \epsilon) = D(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}.$$

Isto significa que f é uma singularidade isolada se e só se f é analítica em todos os pontos de uma vizinhança de z_0 com excepção de z_0. A partir daqui, trataremos apenas deste tipo de singularidades.

Exemplo:

1. A função $f(z) = \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pelo que 0 é uma singularidade isolada de f.

2. A função $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi\mathrm{i} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Assim as singularidades de f são todos os complexos da forma $2k\pi\mathrm{i}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Atendendo a que para cada $k \in \mathbb{Z}$ existe $\epsilon > 0$ tal que f é analtíca na região $0 < |z - 2k\pi\mathrm{i}| < \epsilon$ (basta tomar para ϵ qualquer número real positivo menor que 2π) todas as singularidades são isoladas.

3. A função $f(z) = \log z$ (valor principal) é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$. Assim as singularidades de f são todos os números reais não positivos. É óbvio que todas as singularidades de f não são isoladas, pois qualquer vizinhnça de qualquer número real não positivo contém outros números não positivos.

9.2 Classificação das Singularidades Isoladas

Se z_0 é uma singularidade isolada de f, o Teorema de Laurent garante que f admite desenvolvimento em série de Laurent centrada em z_0

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_o + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \tag{9.1}$$

válido sempre que $0 < |z - z_0| < \epsilon$.

Com base na parte principal desta série, podemos classificar as singularidades isoladas.

- z_0 diz-se **removível** se a série (9.1) tem parte principal nula, ou seja, se:

$$a_{-n} = 0 \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Exemplo;

A função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Desenvolvendo em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$, obtém-se

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \quad , \quad \forall z \neq 0 \tag{9.2}$$

É então óbvio que a parte principal da série é nula e como tal 0 é uma singularidade removível de f. Note-se que a série que representa a função $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$ é uma função inteira (porquê?). Usando esse facto, podemos então prolongar por analiticidade $\operatorname{sen} z/z$ a zero da seguinte forma

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{se} \quad z \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se} \quad z = 0 \end{cases}$$

em que o valor $F(0) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \Big|_{z=0} = 1$.

(9.1), reduz-se à série de potências de $z - z_0$:

$$f(z) = a_o + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \qquad \text{para} \quad 0 < |z - z_0| < \epsilon.$$

A função

$$F(z) = a_o + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad = \begin{cases} f(z) & \text{se} \ \ z \neq z_0 \\ a_0 & \text{se} \ \ z = z_0 \end{cases}$$

diz-se a *extensão analítica* de f a z_0, e então $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe (é igual a a_0). Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição (Critério para classificação de uma sing. removível)

z_0 é singularidade removível de f **sse** $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe (em $\mathbb{C}$).

Demonstração:

Pelo que vimos acima, se z_0 é uma singularidade removível então o $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe. Reciprocamente, se existe o $\lim_{z \to z_0} f(z)$ então $f(z)$ é limitada numa vizinhança de z_0, D; ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para $z \in D$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que a região anular $0 < |z - z_0| \leq r$ esteja contida em D e no domínio de analiticidade de f. Tomando $n \geq 1$ e $0 < \delta < r$, e utilizando o teorema de Laurent, os coeficientes da série (9.1) válida em $0 < |z - z_0| < r$ são dados por:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z - z_0| = \delta} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z - z_0| = \delta} f(z)(z - z_0)^{n-1}\, dz.$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}|a_{-n}| &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=\delta}|f(z)||z-z_0|^{n-1}\,|dz| \leq \frac{M\delta^{n-1}}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=\delta}|dz| \\ &= \frac{M\delta^{n-1}2\pi\delta}{2\pi} = M\delta^n \to 0 \qquad \text{quando} \quad \delta \to 0\end{aligned}$$

Assim $a_{-n} = 0$ para $n \geq 1$, pelo que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$. □

Exemplo:

A função $f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}$ tem singularidades nos pontos $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dado que

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots} = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots} = 1$$

a singularidade 0 é removível. Por outro lado, para $k \neq 0$

$$\lim_{z\to k\pi}\frac{z}{\operatorname{sen} z} = \infty \notin \mathbb{C}$$

pelo que as singularidades $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ não são removíveis.

- z_0 é um **pólo de ordem** $p \in \mathbb{N}$, se a série de Laurent (9.1) é da forma

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_o + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

em que $a_{-p} \neq 0$. Neste caso, $a_{-n} = 0$ para todo $n > p$, pelo que a parte principal da série de Laurent tem apenas um número finito de termos não nulos. Se $p = 1$ o pólo diz-se *simples*.

Exemplo:

A função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Desenvolvendo em série de laurent em torno de $z_0 = 0$, obtém-se

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots \quad , \quad \forall z \neq 0 \tag{9.3}$$

É então óbvio que a parte principal da série tem apenas dois termos não nulos, pelo que 0 é um polo, e dado que a potência de menor expoente da série é z^{-3}, a sua ordem é 3.

Podemos então enunciar o seguinte resultado:

Proposição (Critério para classificação de uma sing. tipo polo)

z_0 é pólo de ordem p de f **sse** $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z)$ existe (em $\mathbb{C}$) e não é zero.

Demonstração:

Pela forma da série de Laurent, é fácil de concluir que se z_0 é um pólo de ordem p, então

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} (z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + a_{-p+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-p+n}(z-z_0)^n + \cdots$$

para $0 < |z - z_0| < \epsilon$. Assim sendo, $F(z)$ é uma função analítica em z_0 e $F(z_0) = a_{-p} \neq 0$, donde se conclui que $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z) = F(z_0) \neq 0$.

Reciprocamente, se o limite anterior existe e é não nulo então $F(z) = (z-z_0)^p f(z)$ tem uma singularidade removível em z_0, pelo que o seu desenvolvimento em série de Laurent em torno de z_0 é da forma:

$$(z-z_0)^p f(z) = F(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \cdots .$$

Note que $b_0 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^p f(z) \neq 0$. Assim,

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-z_0)^p} + \frac{b_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + b_p + b_{p+1}(z-z_0) + b_{p+2}(z-z_0)^2 + \cdots$$

onde $b_0 \neq 0$, donde segue que z_0 é um pólo de ordem p de $f(z)$. $\square$

Exemplo:

A função $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$ tem singularidades nos pontos $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Atendendo a que o numerador se anula em 0 e não se anula em $2k\pi$, para $k \neq 0$ vamos estudar estas singularidades separadamente. Assim, para classificar a singularidade 0, note-se que

$$f(z) = \frac{z}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}} = \frac{z}{\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots} = \frac{z}{z^2\left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots\right)} = \frac{1}{z}G(z),$$

em que $G(z) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots}$ é analítica numa vizinhança de 0 e $G(0) = 2 \neq 0$. Conclui-se que 0 é um polo simples. Para $2k\pi$, $k \neq 0$, note-se em primeiro lugar que classificar a singularidade $2k\pi$ de $f(z)$ é equivalente a classificar a singularidade 0 de $f(z+2k\pi)$. Assim, e mais uma vez utilizando a série de MacLaurin de $\cos z$,

$$f(z+2k\pi) = \frac{z+2k\pi}{1-\cos(z+2k\pi)} = \frac{z+2k\pi}{1-\cos z} = \frac{1}{z^2}H(z)$$

em que $H(z) = \frac{z+2k\pi}{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} + \cdots}$ é analítica numa vizinhança de 0 e $H(0) = 4k\pi \neq 0$. Concluímos que 0 é um polo de ordem 2 de $f(z+2k\pi)$ pelo que $2k\pi$, $k \neq 0$ é um polo de ordem 2 de $f(z)$.

- z_0 diz-se uma **singularidade essencial** de f, se a parte principal do seu desenvolvimento em série de Laurent em torno de z_0, válido em $A(z_0, 0, \epsilon)$, tem uma infinidade de termos não nulos.

Exemplo:

A função $f(z) = z^3 e^{1/z}$ tem uma singularidade isolada em 0. Note-se que $\lim_{z\to 0} f(z)$ não existe dado que a exponencial complexa é periódica e não é limitada. Assim, suspeita-se que a singularidade é essencial. De facto, fazendo o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de 0

$$f(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \cdots \tag{9.4}$$

é fácil de verificar que a parte singular da série (termos a vermelho) tem uma infinidade de termos, pelo que se confirma que 0 é uma singularidade essencial.

9.3 Resíduos

Se z_0 é uma singularidade isolada de f, define-se *Resíduo* de f em z_0, Res(f, z_0), como sendo o coeficiente a_{-1} do desenvolvimento em série de Laurent (com centro em z_0) válida em $A(z_0, 0, r)$.

Exemplo:
Sendo

1. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$, por (9.2), Res$(f, 0) = 0$.
2. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$, por (9.3), Res$(f, 0) = -\frac{1}{3!}$.
3. $f(z) = z^3 e^{1/z}$, por (9.4), Res$(f, 0) = \frac{1}{4!}$.

Proposição: (cálculo de resíduos em singularidades não essenciais)

- se z_0 é uma singularidade removível, então é óbvio que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = 0$$

- se z_0 é um pólo de ordem p, então:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \Big[(z-z_0)^p f(z)\Big]$$

Demonstração:

Por hipótese

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

sendo a série de Laurent uniformemente convergente numa região $0 < |z - z_0| < r$. Assim:

$$(z-z_0)^p f(z) = a_{-p} + \cdots + a_{-2}(z-z_0)^{p-2} + a_{-1}(z-z_0)^{p-1} + a_0(z-z_0)^p + a_1(z-z_0)^{p+1} + \cdots.$$

Derivando $p-1$ vezes (note que $\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-z_0)^k = 0$ para $k < p-1$) resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\Big[(z-z_0)^p f(z)\Big] &= a_{-1}\,(p-1)! + a_0\big(p(p-1)\cdots 3\cdot 2\big)\,(z-z_0) \\ &\quad + a_1\big((p+1)p\cdots 4\cdot 3\big)\,(z-z_0)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $z \to z_0$ obtém-se:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \Big[(z - z_0)^p f(z) \Big] = (p-1)!\, a_{-1}$$

□

Exemplo:

Sendo

- $f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}$, vimos anteriormente que 0 é uma singularidade removível pelo que $\operatorname{Res}(f,0) = 0$.
- $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$ vimos que 0 é um polo simples, pelo que

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = G(0) = 2$$

e para $k \neq 0$, $2k\pi$ são polos de ordem 2, pelo que

$$\operatorname{Res}(f, 2k\pi) = \lim_{z \to 2k\pi} \Big((z - 2k\pi)^2 f(z) \Big)' = 2\pi$$

O seguinte resultado é um caso particular do cálculo de o resíduo num polo simples,

Proposição:
Se $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, com $\phi(z)$ e $\psi(z)$ analíticas em z_0, $\phi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$ e $\psi'(z_0) \neq 0$ então z_0 é um pólo simples de f e

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

Demonstração:

Como $\phi(z)$ e $\psi(z)$ são analíticas em z_0, existem as séries de Taylor daquelas funções válidas numa vizinhança de z_0. Assim sendo, e atendendo a que $\psi(z_0) = 0$

$$\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(z_0) + a_1(z - z_0) + \cdots}{\psi'(z_0)(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \cdots} = \frac{1}{z - z_0} \frac{\phi(z_0) + a_1(z - z_0) + \cdots}{\psi'(z_0) + b_2(z - z_0) + \cdots},$$

pelo que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(z_0)}{\psi'(z_0)} \neq 0.$$

□

Se aplicarmos este resultado à função do exemplo anterior, $f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$, o cálculo do resíduo é bastante mais fácil.

De forma idêntica se pode provar a seguinte versão da regra de Cauchy, que pode ser útil na classificação das singularidades não essenciais e cálculo dos respectivos resíduos.

Teorema: (Caso particular da regra de Cauchy)
Se $f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$, com $\phi(z)$ e $\psi(z)$ analíticas em z_0 e tais que $\phi(z_0) = \psi(z_0) = 0$ e $\psi'(z_0) \neq 0$ então:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi'(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

9.4 Teorema dos Resíduos

Por aplicação directa do teorema de Cauchy generalizado e do teorema de Larent obtém-se o resultado seguinte, que se revela muito importante do ponto de vista das aplicações.

Teorema dos Resíduos

Seja $D \subset \mathbb{C}$ aberto e simplesmente conexo, e considere-se

i) f uma função analítica num aberto $D \setminus \{z_1, ..., z_k\}$;

ii) γ uma curva de Jordan em D percorrida em sentido directo e tal que z_1,...,$z_k \in$ int γ.

Então

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

Exemplos:

(a) Pretendemos determinar o valor do integral

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido positivo. Sendo

$$f(z) = \frac{2z+6}{z^2+4} = \frac{2z+6}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}$$

é óbvio que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$. Dado que

$$|-2\mathrm{i}-\mathrm{i}| = 3 > 2 \qquad , \qquad |2\mathrm{i}-\mathrm{i}| = 1 < 2,$$

temos que $-2\mathrm{i}$ está no exterior da curva enquanto $2\mathrm{i}$ está no seu interior. Aplicando o teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}\, dz = 2\pi\mathrm{i} \operatorname{Res}\,(f, 2\mathrm{i})\ .$$

Como

$$\lim_{z\to 2\mathrm{i}} (z-2\mathrm{i}) f(z) = \frac{4\mathrm{i}+6}{4\mathrm{i}} = \frac{2\mathrm{i}+3}{2\mathrm{i}},$$

concluimos que $2\mathrm{i}$ é um pólo simples e Res $(f, 2\mathrm{i}) = \frac{2\mathrm{i}+3}{2\mathrm{i}}$. Desta forma:

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}\, dz = \pi(2\mathrm{i}+3)\,.$$

(b) Pretendemos determinar o valor do integral

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido positivo. A função $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. A singularidade não é tipo pólo nem removível. Podemos escrever a série de Laurent de f em torno de $z_0 = 0$ para verificarmos que a singularidade é essencial e determinar o respectivo resíduo. Se $0 < |z| < \infty$, então

$$e^{\frac{3}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! z^n} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{9}{2z^2} + \frac{27}{6z^3} + \cdots$$

pelo que se confirma que 0 é singularidade essencial e que $\operatorname{Res}(f, 0) = 3$. Assim sendo:

$$\oint_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}}\, dz = 6\pi \mathrm{i}\ .$$

(c) Pretendemos determinar o valor do integral

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z-1}{z \operatorname{sen}(\pi z)}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido inverso. Denominando

$$f(z) = \frac{z-1}{z \operatorname{sen}(\pi z)}\ ,$$

é fácil de verificar que as singularidades de f são os inteiros, $k \in \mathbb{Z}$. No entanto só as singularidades 0, ± 1 pertencem à região interior à curva, pelo que, aplicando o Teorema dos Resíduos (tendo atenção a orientação da curva), se tem que

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z-1}{z \operatorname{sen}(\pi z)}\, dz = -2\pi \mathrm{i}\Big(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, -1)\Big)$$

Atendendo a que

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \cdots = z\Big(\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \frac{\pi^5 z^4}{5!} - \cdots\Big)$$

e a que, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, se tem

$$\operatorname{sen}\Big(\pi(z+k)\Big) = \pm \operatorname{sen}(\pi z),$$

podemos concluir que, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{sen}(\pi z) = (z-k) g_k(z)$$

em que, para cada k, a função g_k é analítica no ponto k e $g_k(k) \neq 0$. Isto significa que os números inteiros, k, são todos zeros de primeira ordem da função $\operatorname{sen}(\pi z)$. Assim:

- $k = 0$ é um pólo de segunda ordem, visto que

$$\lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z(z-1)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = -\frac{1}{\pi} \lim_{z \to 0} \frac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)} = -\frac{1}{\pi}\ .$$

Como consequência

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\Big(z^2 f(z)\Big)' \\
&= \lim_{z\to 0}\left(\frac{z(z-1)}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right)' \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{(2z-1)\operatorname{sen}(\pi z)-z(z-1)\pi\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} \\
&= \frac{3}{\pi}
\end{aligned}$$

(Aconselha-se o uso da série de Maclaurin de $\operatorname{sen}(\pi z)$ para o cálculo do limite acima indicado).

- $k=1$ é uma singularidade removível, visto que

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z\operatorname{sen}(\pi z)} = \lim_{w\to 0}\frac{w}{(w+1)\operatorname{sen}(\pi w+\pi)} = -\frac{1}{\pi}\lim_{w\to 0}\frac{\pi w}{\operatorname{sen}(\pi w)} = -\frac{1}{\pi}$$

Como consequência $\operatorname{Res}(f,1)=0$.

- $k=-1$ é um pólo simples, visto que

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)(z-1)}{z\operatorname{sen}(\pi z)} = 2\lim_{z\to -1}\frac{z+1}{\operatorname{sen}(\pi z)} = 2\lim_{w\to 0}\frac{w}{\operatorname{sen}(\pi w-\pi)} = -\frac{2}{\pi}$$

Como consequência $\operatorname{Res}(f,1) = -\frac{2}{\pi}$.

Finalmente

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{z-1}{z\operatorname{sen}(\pi z)}\,dz = -2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{3}{\pi}+0-\frac{2}{\pi}\Big) = -2\mathrm{i}$$

Capítulo 10

Aplicações do Teorema dos Resíduos ao Cálculo de Integrais Reais

10.1 Integrais Trigonométricos

Pretende-se calcular o integral

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

onde $F(u,v)$ é uma função real dependendo das duas variáveis reais u e v [1]. Como consequência da fórmula de Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Temos então que, fazendo $z = e^{i\theta}$ (o que implica que $|z| = 1$ e $\frac{dz}{d\theta} = iz$), o integral pode ser escrito na forma

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{F(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})}{iz} dz = \oint_{|z|=1} f(z)\, dz$$

onde $f(z) = \frac{1}{\mathrm{i}z} F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$. Por aplicação do teorema dos resíduos:

$$I = 2\pi i \sum_{j=0}^{k} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

sendo z_j, $j = 0, ..., k$, as singularidades de F interiores ao círculo unitário.

Exemplo:
Vamos calcular o integral

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}^2\theta}$$

[1] Este método serve também para qualquer integral do mesmo tipo num intervalo de comprimento 2π, por exemplo, $\int_{-\pi}^{\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$.

Considerando a parametrização $z = e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ (da circunferência $|z| = 1$, percorrida uma vez no sentido directo), o integral pretendido pode ser escrito como:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz} = 4i \oint_{|z|=1} \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}\, dz$$

A função

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \left\{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}, -\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}, \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}, -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right\}$, sendo claro que:

$$\left|\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right| > 1 \qquad \text{e} \qquad \left|\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right| < 1.$$

Assim sendo, utilizando o teorema dos resíduos:

$$I = 4i \cdot 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(f, \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right) + \operatorname{Res}\left(f, -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)\right).$$

Sendo z_0 uma qualquer singularidade de f então z_0 é pólo simples, pelo que:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \left.\frac{z}{\frac{d}{dz}(z^4 - 10z^2 + 1)}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{z}{4z^3 - 20z}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{1}{4z^2 - 20}\right|_{z=z_0}.$$

Assim:

$$\operatorname{Res}\left(f, \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right) = \left.\frac{1}{4z^2 - 20}\right|_{z=\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

e

$$\operatorname{Res}\left(f, -\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right) = \left.\frac{1}{4z^2 - 20}\right|_{z=-\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = -\frac{1}{8\sqrt{6}}.$$

Resulta então que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2\theta} = -8\pi\left(-\frac{2}{8\sqrt{6}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

10.2 Integrais Impróprios de 1ª espécie de Funções Racionais

Pretende-se calcular o integral impróprio

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

em que

(C1) P e Q são polinómios reais;

(C2) $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(C3) Grau(Q)$-$Grau(P) ≥ 2.

Observe-se que a condição (C2) faz com que a função $P(x)/Q(x)$ seja limitada em $\mathbb{R}$ e a condição (C3) faz com que o integral impróprio seja convergente.

Considera-se a função complexa auxiliar $F(z) = P(z)/Q(z)$, e para R suficientemente grande a curva Γ_R como sendo a fronteira do semi-círculo centrado na origem e de raio R definido no semiplano $\{z : \text{Im}\, z \geq 0\}$. Por aplicação do Teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{k} \text{Res}\,(\frac{P}{Q}, z_j) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$$

sendo z_j, $j = 0, ..., k$ os zeros de Q com parte imaginária positiva. Por outro lado

$$\Gamma_R = I_R \cup S_R = \{z = x \,:\, x \in]-R, R[\} \cup \{z = Re^{i\theta} \,:\, \theta \in [0, \pi]\}$$

Então

$$\alpha = \int_{I_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz + \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx + \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

Fazendo $R \to \infty$,

$$\alpha = I + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

Dado que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que para $|z| = R$ suficientemente grande

$$\Big|\frac{P(z)}{Q(z)}\Big| \leq \frac{M}{|z|^{k-l}},$$

onde k e l são os graus de $Q(z)$ e $P(z)$, respectivamente. Assim sendo, para R suficientemente grande

$$\Big|\int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\Big| \leq \int_{S_R} \frac{M}{|z|^{k-l}} |dz| = \frac{M\pi R}{R^{k-l}} = \frac{M\pi}{R^{k-l-1}},$$

Por aplicação da condição (C3) podemos concluir que $k - l - 1 \geq 2 - 1 = 1$, pelo que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0$$

Conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \alpha = 2\pi i \sum_{j=0}^{k} \text{Res}\,(\frac{P}{Q}, z_j)$$

sendo z_j, $j = 0, ..., k$ os zeros de $Q(z)$ com parte imaginária positiva.

Exemplo:

Determinar o valor de

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)}$$

Considere-se a função complexa de variável complexa

$$F(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$$

e para R suficientemente grande a curva γ_R como sendo a fronteira da região

$$D_R = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi\}$$

à qual se atribui a orientação positiva (ou sentido directo).

As singularidades de $F(z)$ são $\pm 2i$ e $\pm 3i$. Dado que $2i$, $3i \in D_R$ e $-2i$, $-3i \notin D_R$, por aplicação do teorema dos resíduos

$$\oint_{\gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}\,(F,2i) + \mathrm{Res}\,(F,3i)\Big)$$

Visto que

$$F(z) = \frac{1}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})(z+3\mathrm{i})} \tag{10.1}$$

vê-se que todas as singularidades de (10.1) são zeros de ordem 1 do denominador e não anulam o numerador, pelo que são pólos simples de $F(z)$. Como tal:

$$\mathrm{Res}\,(F,2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} (z-2i)F(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z+2\mathrm{i})(z^2+9)} = \frac{1}{20\mathrm{i}}$$

e

$$\mathrm{Res}\,(F,3\mathrm{i}) = \lim_{z\to 3\mathrm{i}} (z-3i)F(z) = \lim_{z\to 3\mathrm{i}} \frac{1}{(z^2+4)(z+3\mathrm{i})} = -\frac{1}{30\mathrm{i}}$$

Então

$$\oint_{\gamma} F(z)\,dz = \frac{\pi}{30}.$$

Por outro lado, atendendo ao facto de que a curva γ_R é composta pelo segmento

$$I_R = \{z\in\mathbb{C} \;:\; z = x\;,\; x\in[-R,R[\}$$

e pela semicircunferência

$$S_R = \{z\in\mathbb{C} \;:\; z = Re^{i\theta}\;,\; \theta\in[0,\pi[\}$$

podemos escrever

$$\frac{\pi}{30} = \int_{I_R} F(z)\,dz + \int_{S_R} F(z)\,dz$$

Em I_R, $z = x$ com $x\in[-R,R]$, pelo que

$$\frac{\pi}{30} = \int_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int_{S_R} F(z)\,dz$$

e, fazendo R tender para $+\infty$

$$\frac{\pi}{30} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{S_R} F(z)\,dz$$

Por outro lado

$$\Big|\int_{S_R} F(z)\,dz\Big| \le \int_{S_R} |F(z)|\,|dz| \le \int_{S_R} \frac{|dz|}{\left(|z|^2-4\right)^2\left(|z|^2-9\right)^2} = \frac{\pi R}{(R^2-4)^2(R^2-9)^2}$$

Temos então que

$$\lim_{R\to\infty}\Big|\int_{S_R} F(z)\,dz\Big| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{(R^2-4)^2(R^2-9)^2} = 0$$

o que implica

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} F(z)\,dz = 0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \frac{\pi}{30}$$

10.3 Integrais Impróprios de 1ª espécie envolvendo funções Trigonométricas

Pretende-se calcular integrais impróprios do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(ax)\,dx$$

em que $a \in \mathbb{R}^+$ e:

(C1) f é analítica em $\mathbb{C}$ excepto num conjunto finito de singularidades;

(C2) f não tem singularidades no eixo real.

Em ambos os casos, considera-se a função complexa auxiliar

$$F(z) = f(z)\,e^{iaz}$$

e, para R suficientemente grande, a curva Γ_R como sendo a fronteira do semi-círculo centrado na origem e de raio R, contido no semiplano $\{z\,:\mathrm{Im}\,z \geq 0\}$. Por aplicação do Teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=0}^{k}\mathrm{Res}\,(F, z_j) \equiv \mathcal{I}$$

sendo z_j, para $j = 0, 1, \ldots, k$, os zeros de Q com parte imaginária positiva. Note que o valor de $\mathcal{I}$ não depende de R (desde que $R > \max\{|z_1|, \ldots, |z_k|\}$). Por outro lado,

$$\Gamma_R = I_R \cup S_R = \Big\{z = x\ :\ x \in]-R, R[\Big\} \cup \Big\{z = Re^{i\theta}\ :\ \theta \in [0, \pi]\Big\}$$

Então

$$\mathcal{I} = \int_{I_R} f(z)e^{iaz}\,dz + \int_{S_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)e^{iaz}\,dx + \int_{S_R} f(z)e^{iaz}\,dz$$

Fazendo $R \to +\infty$,

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{iax}\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)e^{iaz}\,dz$$

Lema de Jordan Seja $a > 0$ e f uma função analítica em $\mathbb{C}$ excepto num conjunto finito de singularidades. Seja S_R a semi-circunferência $|z| = R$, com $\mathrm{Im}\,z > 0$.

a) Para qualquer $R > 0$:

$$\int_{S_R} |e^{\mathrm{i}az}||dz| < \frac{\pi}{a}$$

b) Seja $f(z)$ analítica em $|z| > r$, para algum $r > 0$ e tal que:

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \to 0, \quad \text{quando } R \to +\infty$$

então:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)e^{\mathrm{i}az}\,dz = 0$$

Dem.:

a) Parametrizando a semicircunferência por $z(\theta) = Re^{\mathrm{i}\theta} = R\cos\theta + \mathrm{i}R\,\mathrm{sen}\,\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$, então $\sqrt{R^2\cos^2\theta + R^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} = R$, pelo que:

$$\int_{S_R} \left|e^{\mathrm{i}az}\right| |dz| = \int_0^{\pi} \left|e^{\mathrm{i}aR\cos\theta}\right| \left|e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}\right| R\,d\theta = \int_0^{\pi} e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}\,R\,d\theta \tag{10.2}$$

Como $\mathrm{sen}(\pi - \theta) = \mathrm{sen}(\theta)$, para $\theta \in [0, \pi]$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$ é um eixo de simetria do gráfico da função $g(\theta) = e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}$. Desta forma, e atendendo também a que $\mathrm{sen}\,\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$ para qualquer $\theta \in [0, \pi/2]$:

$$\int_{S_R} \left|e^{\mathrm{i}az}\right| |dz| = 2\int_0^{\pi/2} e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta} R d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi}\theta} 2R d\theta = \frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) < \frac{\pi}{a} \tag{10.3}$$

b) Como $M(R) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{|z|=R} |f(z)| \to 0$ quando $R \to +\infty$,

$$\left|\int_{S_R} f(z)e^{\mathrm{i}az}\,dz\right| \leq M(R)\int_{S_R} |e^{\mathrm{i}az}||dz| \leq \frac{M(R)\pi}{a} \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad R \to +\infty$$

$\square$

Exemplo importante: Se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios reais (isto é, os seus coeficientes são reais), tem-se que se

$$\text{Grau } Q(z) > \text{Grau } P(z) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Grau } Q(z) - \text{Grau } P(z) \geq 1$$

então $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{C}{R}$ para $|z| = R$, pelo que:

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \to 0, \quad \text{em } \ |z| = R \quad \text{quando } \ R \to +\infty$$

Pelo lema de Jordan:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{\mathrm{i}az}\,dz = 0$$

$\square$

Com f satisfazendo (C1) e $a > 0$, o lema de Jordan determina que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)e^{\mathrm{i}az}\,dz = 0$$

Conclui-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}ax}\,dx = \mathcal{I}$$

Dado que $ax \in \mathbb{R}$, resulta da fórmula de Euler que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}ax}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(ax)\,dx$$

pelo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)\,dx \;=\; \operatorname{Re}\mathcal{I} \qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}(ax)\,dx \;=\; \operatorname{Im}\mathcal{I}$$

Exemplo:
Vamos determinar o integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2+1}\,dx$$

utilizando o Teorema dos Resíduos. Para tal considere-se a função complexa

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{4z^2+1}$$

e, para $R \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, a curva γ_R como sendo a fronteira do semi-círculo

$$\{z \;:\; |z| \le R \text{ e } \operatorname{Im} z \ge 0\}$$

com orientação positiva (percorrida em sentido directo). Visto F ser analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$, aplicando o Teorema dos Resíduos obtém-se

$$\oint_{C_R} F(z)\,dz = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}\left(F(z), \tfrac{\mathrm{i}}{2}\right)$$

Dado que

$$F(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{4\left(z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\left(z+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)}, \tag{10.4}$$

como $\mathrm{i}/2$ é zero de ordem 1 do denominador de (10.4) e não anula o numerador de (10.4), conclui-se que $i/2$ é pólo simples de F. Consequentemente:

$$\operatorname{Res}\left(F, \tfrac{i}{2}\right) = \lim_{z \to i/2} \left(z - \frac{i}{2}\right) F(z) = \frac{e^{-1/2}}{4i}$$

Sendo assim

$$\oint_{C_R} F(z)\,dz = \pi \frac{e^{-1/2}}{2}$$

Por outro lado

$$\gamma_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in [-R, R]\} \cup \{z \;:\; |z| = R\,,\, \operatorname{Im} z > 0\}$$

pelo que

$$\pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \oint_{\gamma_R} F(z)\,dz = \int_{I_R} F(z)\,dz + \int_{S_R} F(z)\,dz$$

e atendendo à definição de I_R

$$\pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \int_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int_{S_R} F(z)\,dz$$

Fazendo $R \to \infty$

$$\pi \frac{e^{-1/2}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \lim_{R \to \infty} \int_{S_R} F(z)\,dz$$

Atendendo a que Grau$(4z^2+1)$-Grau(1)=2, tem-se que para $|z|=R$

$$\lim_{|z|=R\to\infty}\left|\frac{1}{4z^2+1}\right|=0$$

Por aplicação do lema de Jordan, podemos concluir que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R}F(z)\,dz=0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\pi\frac{e^{-1/2}}{2}=\frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

Finalmente, visto $x\in\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^ix}{4x^2+1}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{4x^2+1}\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{4x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

concluindo-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{4x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

Capítulo 11

Apêndices

11.1 Apêndice A: Séries Reais de Termos Não Negativos

Considere-se u_n uma sucessão de termos reais não negativos. Sendo assim, a sucessão das somas parciais associada à série de termos geral u_n, (S_N) é monótona (crescente) e minorada ($S_1 \leq S_N$ para qualquer $N \in \mathbb{N}$). Conclui-se então que neste caso

$$\sum u_n \text{ é convergente sse } (S_N) \text{ é majorada.}$$

Critérios de Convergência

- **Critério geral de comparação**

  Se u_n e v_n são sucessões reais tais que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $0 \leq u_n \leq v_n$, então:

  a) Se $\sum v_n$ é convergente tambem $\sum u_n$ é convergente.

  b) Se $\sum u_n$ é divergente tambem $\sum_n v_n$ é divergente.

  Demonstração:

  a) Se $S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$ e $T_N = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$ então como $\sum v_n$ é convergente, T_N é convergente, logo limitada. Como, para todo o $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq S_N \leq T_N$, S_N também é limitada; como também é monótona, logo é convergente.

  b) Caso contrário (isto é, se $\sum v_n$ fosse convergente), então pela alínea a) $\sum u_n$ seria convergente, o que contradiz a hipótese. Logo, $\sum v_n$ tem que ser divergente. $\square$

  Nota: a conclusão do critério geral de comparação permanece válida se $0 \leq u_n \leq v_n$ se verifica apenas a partir de certa ordem pois, como vimos, a natureza das séries não depende do valor dos seus termos iniciais.

  Exemplo:

  Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Dado que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $\log n < n$, teremos que, para $n > 1$

$$\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{diverge}$$

pelo primeiro critério geral de comparação a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ será também divergente.

- **Corolário do Critério Geral de Comparação**

  Se u_n e v_n são sucessões reais e $a < b$ são números reais positivos tais que

  $$0 \leq av_n \leq u_n \leq bv_n \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N},$$

  então $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza.

  Nota: este resultado é consequência simples do critério geral de comparação (porquê?).

- **$2^{\underline{o}}$ Critério de Comparação**

  Sejam u_n e v_n sucessões reais de termos não negativos tais que $\lim \frac{u_n}{v_n} = l$. Então, se $l \in]0, +\infty[$ conclui-se que as séries $\sum u_n$ e $\sum v_n$ têm a mesma natureza.

  Demonstração: Considere-se $\epsilon < l$, ou seja, tal que $l - \epsilon > 0$. Pela definição de limite, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão u_n/v_n verificam

  $$l - \epsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \epsilon,$$

  pelo que (como $v_n \geq 0$):

  $$0 \leq (l - \epsilon)v_n < u_n < (l + \epsilon)v_n.$$

  Usando agora o corolário do critério geral de comparação, obtém-se o resultado. □

  Exemplo:

  Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n}}$. Dado que

  $$\lim_n \frac{\frac{2n+1}{n\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 2 < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ \text{diverge}$$

  pelo segundo critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sqrt{n}}$ é divergente.

- **Critério de D'Alembert**

  Seja u_n uma sucessão real de termos positivos tal que existe

  $$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

  Então:

  a) Se $l < 1$ a série $\sum_n u_n$ é convergente.

b) Se $l > 1$ a série $\sum_n u_n$ é divergente.

Nota: No caso $l = 1$, o critério de D'Alembert é **inconclusivo**.

Demonstração: A ideia genérica desta prova é estabelecer uma comparação da série $\sum u_n$ com uma série geométrica de razão, r, apropriada. Para tal:

a) Dado $\epsilon > 0$ tão pequeno que $l+\epsilon < 1$ (como $l < 1$, basta tomar $\epsilon < 1-l$), a definição de limite da sucessão u_{n+1}/u_n garante-nos que a partir de certa ordem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon < 1.$$

Seja $r = l + \epsilon$. Então:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \epsilon = r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por $\frac{u_n}{r^{n+1}}$ obtém-se:

$$\frac{u_{n+1}}{r^{n+1}} < \frac{u_n}{r^n}.$$

Assim, u_n/r^n é decrescente, logo majorada por um certo $M > 0$:

$$\frac{u_n}{r^n} \leq M \qquad \Rightarrow u_n \leq Mr^n$$

Além disso, $u_n > 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Do critério geral de comparação, como $\sum Mr^n$ é convergente ($r < 1$), então $\sum u_n$ também é uma série convergente.

b) Dado $\epsilon > 0$ tão pequeno que $l-\epsilon > 1$ (como $l > 1$, basta tomar $\epsilon < l-1$), a definição de limite da sucessão u_{n+1}/u_n garante-nos que a partir de certa ordem:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \epsilon > 1$$

Seja $r = l-\epsilon$. Procedendo de forma análoga à demonstração de (a) (exercício), resulta que, para algum $L > 0$:

$$0 < Lr^n < u_n$$

Do critério geral de comparação, como $\sum Lr^n$ é divergente ($r > 1$), então $\sum u_n$ é também divergente. $\square$

Exemplo:

Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$. Sendo $u_n = \frac{n^2}{e^{n^3}}$ tem-se que

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^2}{e^{(n+1)^3}}}{\frac{n^2}{e^{n^3}}} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{n^3-(n+1)^3} = 0 < 1$$

pelo que, por aplicação do Critério de D'Alembert, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{n^3}}$ é convergente.

- **Critério da Raiz**

  Seja u_n sucessão real de termos não negativos, tal que existe

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$$

  Então

  ◇ se $l < 1$ a série $\sum_n u_n$ é convergente.

  ◇ se $l > 1$ a série $\sum_n u_n$ é divergente.

  Notas:

  ◇ No caso $l = 1$, o critério da raiz é **inconclusivo**.

  ◇ Se quiser justificar este resultado, use a ideia da prova do critério de D'Alembert. Os detalhes são um pouco mais simples, neste caso.

  Exemplo:

  Considere-se a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+(-1)^n}$. Começamos por observar que o Critério de D'Alembert não é aplicável; pois tomando $u_n = 2^{n+(-1)^n}$, então:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} & \text{se} \quad n \ \text{par}, \\ \frac{2^{n+2}}{2^{n-1}} = 8 & \text{se} \quad n \ \text{ímpar}. \end{cases}$$

  Pode-se, por isso, concluir que $\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$ não existe. No entanto

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \left(2^{n+(-1)}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_n 2^{1+\frac{(-1)^n}{n}} = 2 > 1$$

  pelo que, por aplicação do critério da raiz, a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+(-1)^n}$ é divergente.

- **Critério da Raiz de Cauchy**

  Seja u_n uma sucessão real de termos não negativos e defina-se

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} = l \quad (\text{finito ou infinito}).$$

  Então

  a) se $l < 1$ a série $\sum_n u_n$ é convergente;

  b) se $l > 1$ a série $\sum_n u_n$ é divergente;

  Notas:

- ◇ Define-se $\limsup \sqrt[n]{u_n}$ como o supremo do conjunto dos sublimites de u_n. Um sublimite de u_n é um limite de uma subsucessão de u_n.
- ◇ Este resultado generaliza o critério da raiz às situações onde o $\lim \sqrt[n]{u_n}$ não existe.
- ◇ No caso $l = 1$, o critério da raiz é **inconclusivo**.

Exemplo:

Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(3+(-1)^n)^n}$. Começamos por observar que o critério da raiz não é aplicável (e, consequentemente, o critério de D'Alembert também não) visto que, com $u_n = \frac{5}{(3+(-1)^n)^n}$, se tem

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt[n]{5} & \text{para} \quad n \text{ par} \\ \\ \frac{1}{2}\sqrt[n]{5} & \text{para} \quad n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim sendo, a subsucessão dos termos pares de $\sqrt[n]{u_n}$ converge para $\frac{1}{4}$, mas a subsucessão dos termos ímpares de $\sqrt[n]{u_n}$ converge para $\frac{1}{2}$; desta forma, o limite de $\sqrt[n]{u_n}$ não existe. No entanto, o conjunto dos sublimites da sucessão $\sqrt[n]{u_n}$ é

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}$$

e assim

$$\limsup_n \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$$

pelo que, por aplicação do Critério da raź de Cauchy, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(3+(-1)^n)^n}$ é convergente.

- **Critério do Integral**

Seja $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e decrescente. Se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se tem $f(n) = u_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ é convergente sse existe (em } \mathbb{R}\text{) o } \lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)\,dx.$$

Demonstração: Seja S_N a sucessão das somas parciais de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Atendendo a que f é decrescente, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se $n \leq x \leq n+1$ então $u_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = u_n$, o que implica que

$$\underbrace{u_{n+1}}_{=\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \underbrace{u_n}_{=\int_n^{n+1} f(n)\,dx}.$$

Somando as desigualdades anteriores para $n = 1, 2, \ldots N-1$, obtém-se:

$$S_N - u_1 = \sum_{n=2}^{N} u_n \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} u_n = S_{N-1}, \tag{11.1}$$

Note que, como f é uma função positiva, a sucessão $T_N = \int_1^N f(x)\,dx$ é crescente. Das desigualdades (11.1) conclui-se que T_N é convergente sse S_N é convergente, o que é equivalente à conclusão que queríamos obter. □

11.1.1 Séries de Dirichlet

Uma série de Dirichlet é uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad , \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha \leq 1$, então $0 < n^\alpha \leq n$, pelo que

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$. Pelo critério geral de comparação, como a série harmónica, $\sum \frac{1}{n}$, diverge, a série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ também diverge.

No caso $\alpha > 1$, seja $f(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$. Como

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N x^{-\alpha}\,dx = \lim_{N\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^N = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{\alpha-1},$$

pelo critério do integral, a série converge.

Podemos então concluir que:

- A série de Dirichlet **converge** sse $\alpha > 1$.
- A série de Dirichet **diverge** sse $\alpha \leq 1$.

11.1.2 Séries Alternadas

Uma série de termos reais diz-se *alternada* se os seus termos forem alternadamente positivos e negativos. Se assumirmos que o primeiro termo de uma série alternada é negativo (respectivamente positivo), então a série pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{11.2}$$

$\left(\text{resp. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n\right)$, em que $a_n > 0$. Basta então estudar (11.2).

Critério de Leibnitz: Se (u_n) é uma sucessão de termos reais positivos, decrescente e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, então a série alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ é convergente.

Exemplo: *Determinação do erro da aproximação da soma de uma série alternada por uma soma parcial.*

Se uma série alternada converge obedecendo às condições do critério de Leibniz então, para $N+1$ par, $(-1)^{N+1}a_{N+1} > 0$, e então:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n\right| = a_{N+1} - \underbrace{(a_{N+2} - a_{N+3})}_{>0} - \underbrace{(a_{N+4} - a_{N+5})}_{>0} - \cdots$$
$$- \underbrace{(a_{N+k} - a_{N+k+1})}_{>0} - \cdots < a_{N+1}$$

Se $N+1$ é ímpar, deduzimos do caso anterior que:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1} a_n\right| < a_{N+1}$$

Assim, o erro que se comete ao aproximar a série (11.2) pela sua sucessão das somas parciais, $-a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^N a_N$, é menor que a_{N+1}.

Nota: a estimativa anterior só foi provada para séries que satisfazem as condições do critério de Leibniz. No caso geral não é possível controlar o erro de aproximação da soma de uma série da forma acima descrita.

A série harmónica alternada,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

é um exemplo de uma série que converge mais não converge absolutamente. Trata-se do exemplo mais simples de uma série *simplesmente convergente*.

11.2 Apêndice B: Convergência Uniforme

11.2.1 Convergência Pontual e Convergência Uniforme de Sucessões de Funções

Considere-se $\{f_n(z)\,,\, n \in \mathbb{N}\}$, com $z \in D \subset \mathbb{C}$, uma sucessão de funções complexas.

Convergência Pontual

- Diz-se que a sucessão $\{f_n(z)\}_n$ converge no ponto z_0 se para a sucessão numérica $\{f_n(z_0)\}_n$ for convergente. Se $\{f_n(z)\}_n$ convergir em todos os pontos de um conjunto D dizemos que $\{f_n(z)\}_n$ é pontualmente convergente em D. Neste caso podemos definir, para cada $z \in D$:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon, z) \text{ tal que } \forall n > N \text{ se tem } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

Convergência Uniforme

- Diz-se que a sucessão f_n converge uniformemente em D,

$$f_n \to f \text{ uniformemente em D} \quad \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall n > N \text{ se tem } |f_n(z) - f(z)| < \epsilon\,,\ \forall z \in D$$

Note-se que, na noção de convergência uniforme, N é independente de $z \in D$.

- f_n converge uniformente para f em D é equivalente a afirmar que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall n > N \text{ se tem } \sup_{z \in D} |f(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \sup_{z \in D} \big|f(z) - f_n(z)\big| \;=\; 0$$

Critério de Cauchy para Convergência Uniforme

- A sucessão de funções f_n converge uniformemente em D se e só se

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \text{ tal que } \forall n > m > N \text{ se tem } |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon\,, \; \forall z \in D$$

- f_n converge uniformente para f em D é equivalente a afirmar que

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \;\text{ tal que }\; \forall m, n > N \;\text{ se tem }\; \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{m,n \to \infty} \sup_{z \in D} \big|f_n(z) - f_m(z)\big| \;=\; 0$$

Propriedades do Limite de uma sucessão de funções uniformemente convergente

Suponhamos que $\lim_n f_n = f$ uniformemente num conjunto aberto $D \subset \mathbb{C}$. Então

- Se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua em D, então f é contínua em D.

  Demonstração. Tomemos um $z_0 \in D$ arbitrário. Dado $\epsilon > 0$, existe N tal que para todos os $n \geq N$ e $z \in D$ se tem

$$\big|f_n(z) - f(z)\big| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{11.3}$$

  Sendo f_N contínua em z_0, então então existe $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$, se tem

$$\big|f_N(z) - f_N(z_0)\big| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{11.4}$$

  Assim sendo, usando (11.3) (em z e em z_0) e também (11.4),

$$\begin{aligned} \big|f(z) - f(z_0)\big| &= \big|f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f(z_0)\big| \\ &\leq \big|f(z) - f_N(z)\big| + \big|f_N(z) - f_N(z_0)\big| + \big|f_N(z_0) - f(z_0)\big| \\ &\leq \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} \;=\; \epsilon, \end{aligned}$$

  para qualquer z tal que $|z - z_0| < \delta$. Isto prova que f é contínua em $z_0 \in D$ arbitrário. □

- Se para todo o $n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua em D, e γ é um caminho seccionalmente regular em D, então:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z)\, dz,$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, f é contínua. Então, pelo teorema de Weierstrass existe

$$M_n = \max_{t\in[a,b]} \left|f_n\left(\gamma(t)\right) - f\left(\gamma(t)\right)\right|$$

Então:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| &= \left|\int_\gamma \left[f_n(z) - f(z)\right]\,dz\right| \\
&\leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|dz| \\
&\leq M_n L(\gamma) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty,
\end{aligned}$$

pois $M_n \to 0$ pela hipótese de que $f_n \to f$ uniformemente em D. □

- Se D é simplesmente conexo e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, f_n é analítica em D, então tem-se que f é analítica em D e

$$f'(z) = \lim_n f_n'(z) \qquad , \qquad \forall z \in D$$

Demonstração. Dado $z \in D$ arbitrário, considera-se um disco $D(z,\rho) \subset D$. Note que as funções f_n são analíticas em $D(z,\rho)$.

Para qualquer curva de Jordan γ contida em $D(z,\rho)$, usando o teorema anterior e o teorema de Cauchy

$$\int_\gamma f(\omega)d\omega = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(\omega)d\omega = 0.$$

Como, pelo que vimos acima, f é contínua, pelo teorema de Morera a função f é analítica em $D(z,\rho)$. Concluimos que f é analítica em qualquer $z \in D$.

Assim sendo, fixando de novo $z \in D$ e usando agora a fórmula integral de Cauchy generalizada numa circunferência $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = \rho\}$, com $D(z,\rho) \subset D$, percorrida no sentido directo:

$$\begin{aligned}
\left|f_n'(z) - f'(z)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma \frac{\left|f_n(w) - f(w)\right|}{|w-z|^2}\,|dw| \;= \frac{1}{2\pi\rho^2}\oint_\Gamma \underbrace{\left|f_n(w) - f(w)\right|}_{\leq M_n}\,|dw| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\rho^2}\,M_n\,L(\Gamma) \;=\; \frac{M_n}{\rho},
\end{aligned}$$

onde

$$M_n = \max_{w\in\Gamma}\left|f_n(w) - f(w)\right|.$$

Pela convergência uniforme de f_n para f, $M_n \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Em consequência,

$$\left|f_n'(z) - f'(z)\right| \leq \frac{M_n}{\rho} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

□

11.2.2 Convergência Pontual e Convergência Uniforme de Séries de Funções

Considere-se $\{f_n(z)\}$, $z \in D \subset \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções complexas e a sua respectiva soma $\sum_n f_n(z)$

- (Convergência Pontual da Série)

  Diz-se que a série $\sum_n f_n(z)$ converge no ponto z_0 se a série numérica $\sum_n f_n(z_0)$, isto é, se a sucessão (numérica) das somas parciais $S_N(z_0) = f_1(z_0) + \cdots + f_N(z_0)$ for convergente. Se $\sum_n f_n(z)$ convergir em todos os pontos $z \in D$ então dizemos que a série é pontualmente convergente em D. Neste caso podemos definir a função *soma* (da série) por:

$$f(z) = \sum_n f_n(z) \qquad \text{para qualquer} \quad z \in D$$

- (Convergência Uniforme da Série)

  Diz-se que a série $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente em D, se a sucessão das somas parciais, $S_N(z)$ for uniformemente convergente em D, isto é, se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists P = P(\epsilon) \ : \ \forall N > P \text{ se tem } \forall z \in D \ |f(z) - S_N(z)| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in D} \big|f(z) - S_N(z)\big| = 0$$

Critério de Weierstrass

Seja $f_n(z)$ uma sucessão de funções definidas para $z \in D$ que verifica

$$|f_n(z)| \le M_n \qquad \text{para quaisquer} \quad z \in D \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N}$$

e onde a série real de termos não negativos $\sum_n M_n$ é convergente. Então a série $\sum_n f_n(z)$ é uniformemente convergente em D.

<u>Propriedades da Soma de uma série de funções uniformemente convergente</u>

Considere-se $f(z) = \sum_n f_n(z)$ uniformemente em $D \subset \mathbb{C}$ aberto. Então

- se para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é contínua em D, tem-se que f é contínua em D e

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_n \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

  qualquer que seja a curva γ regular contida em D.

- se para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n é analítica em D e D é simplesmente conexo, tem-se que f é analítica em D e

$$f'(z) = \sum_n f'_n(z) \qquad , \qquad \forall z \in D$$

No caso particular das séries de potências, o Teorema de Abel, o Critério de Weierstrass e as propriedades dos limites das séries de potências uniformemente convergentes implicam o seguinte resultado.

Convergência Uniforme e Analiticidade de uma Série de Potências

Teorema: (Convergência uniforme de uma série de potências)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências de raio de convergência R. Então a série é uniformemente convergente em todos os círculos

$$\overline{D(z_0, r)} = \left\{ z \, : \, |z - z_0| \leq r \right\}$$

com raio $r < R$.

A partir da noção de convergência uniforme resultam facilmente os resultados sobre derivação e integração de séries de potências termo a termo, que no texto principal demonstrámos sem esse recurso.

Dado que, para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ é inteira, a partir da convergência uniforme da série podemos concluir que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ é analítica em $\{z \, : \, |z - z_0| < R\}$, e para todo z no interior do círculo de convergência

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

$$\int_\gamma f(w)\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (w - z_0)^n \, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left((z - z_0)^{n+1} - (a - z_0)^{n+1} \right)$$

para qualquer curva regular γ em $D(z_0, R)$ onde a e z são os pontos inicial e final de γ, respectivamente. Em consequência, as primitivas de $f(z)$ são dadas por

$$C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}, \qquad C \in \mathbb{C}.$$

Em particular, podemos afirmar o seguinte.

Teorema:(Analiticidade de uma série de potências)
Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{em} \quad |z - z_0| < R$$

isto é, f é uma série de potências de centro z_0 convergente em $|z - z_0| < R$. Então f é analítica no seu domínio de convergência.