DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2024/2025

3º Teste - Versão A

8 de Janeiro de 2025

Cursos: LMAC e LEFT

[6,0 val] 1. Determine a solução geral da equação

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3t}}{1+t^2} \quad .$$

Solução: Trata-se duma EDO de segunda ordem linear não homogénea.

Sabemos que a solução geral do problema não homogéneo resulta da soma de uma solução particular não homogénea a todas as soluções homogéneas, as quais formam um espaço vectorial de dimensão 2:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t).$$

As soluções do problema homogéneo obtêm-se da equação

$$y_H'' - 6y_H' + 9y_H = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 6D + 9)y_H = 0 \Leftrightarrow (D-3)^2 y_H = 0,$$

donde, pela multiplicidade algébrica dupla do valor próprio 3, se conclui que duas soluções linearmente independentes, formando uma base do espaço vectorial das soluções homogéneas, são e^{3t} e te^{3t}. Assim, o conjunto das soluções do problema homogéneo é o espaço gerado por estas duas soluções:

$$y_H(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \qquad \text{com} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

O termo não homogéneo $\frac{e^{3t}}{1+t^2}$ não é aniquilável, pelo que para determinar a solução geral desta equação não homogénea é necessário recorrer à fórmula da variação das constantes para obter uma solução particular. Como já obtivemos uma base do espaço das soluções homogéneas, a matriz Wronskiana pode calcular-se imediatamente

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 3e^{3t} & (1+3t)e^{3t} \end{bmatrix},$$

e a sua inversa

$$W^{-1}(t) = \begin{bmatrix} (1+3t)e^{-3t} & -te^{-3t} \\ -3e^{-3t} & e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

A solução geral é agora dada pela fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} -te^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} \frac{e^{3t}}{1+t^2} dt \\ &= c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{-t}{1+t^2} \\ \frac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} dt \\ &= c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\log(1+t^2) \\ \arctan t \end{bmatrix} \\ &= c_1e^{3t} + c_2te^{3t} - e^{3t}\log(\sqrt{1+t^2}) + te^{3t}\arctan t, \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

[6,0 val] 2. Determine todas as soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(t)\, u, & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t), \qquad u(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Solução: Substituindo na equação diferencial parcial $u(x,t) = X(x)T(t)$, ou seja, aplicando o método de separação de variáveis, obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + \cos(t)X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - \cos(t) = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = (\lambda + \cos(t))T(t) \\ X''(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogénea de primeira ordem para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t + \operatorname{sen}(t)} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A segunda equação corresponde à determinação dos valores próprios e funções próprias da segunda derivada, os quais dependem não só da equação, mas também das condições de fronteira. A expressão para as soluções da segunda equação dependem do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$ e $u(0,t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas implicam que

$$X'(0)T(t) = X'(1)T(t) \Leftrightarrow (X'(0) - X'(1))T(t) = 0 \Leftrightarrow X'(0) = X'(1),$$

(caso contrário seria $T(t) = 0$ que levaria a soluções triviais) e, da mesma forma,

$$X(0)T(t) = 0 \Leftrightarrow X(0) = 0.$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}B - \sqrt{\lambda}C = \sqrt{\lambda}Be^{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}Ce^{-\sqrt{\lambda}} \\ B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\lambda}B(2 - (e^{\sqrt{\lambda}} + e^{-\sqrt{\lambda}})) = 0 \\ B = -C \end{cases}$$

Como $\lambda > 0$, também $\sqrt{\lambda} > 0$ e a primeira equação implica então $B = 0$ ou $e^{\sqrt{\lambda}} + e^{\sqrt{-\lambda}} = 2$. Esta última equação só é verdadeira se $\lambda = 0$, o que não é o caso aqui. Portanto a conclusão é que só pode ser $B = 0$ e consequentemente $C = -B = 0$, pela segunda equação. A única solução com $\lambda > 0$ é por isso a solução trivial $X(x) = 0$.

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} B = B \\ C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \in \mathbb{R} \\ C = 0 \end{cases}$$

Conclui-se assim que, para $\lambda = 0$, existem as soluções não triviais $X(x) = Bx$.

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C = -\sqrt{-\lambda}B\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}) + \sqrt{-\lambda}C\cos(\sqrt{-\lambda}) \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-\lambda}C(1 - \cos(\sqrt{-\lambda})) = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que, para não ser $C = 0$, que nos conduziria apenas à solução trivial $X(x) = 0$, só poderá ser, então,

$$\cos(\sqrt{-\lambda})) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = 2n\pi \Leftrightarrow \lambda = -4n^2\pi^2.$$

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A\,x\,e^{\operatorname{sen}(t)}, \quad \text{para} \quad \lambda = 0$$

e

$$A\operatorname{sen}(2n\pi x)\,e^{-4n^2\pi^2 t + \operatorname{sen}(t)}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

com $A \in \mathbb{R}$.

3. Considere a matriz, dependente do parâmetro α,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[6,0 val] (a) Para $\alpha = 4$ obtenha explicitamente a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(0) = (1, 1).$$

[2,0 val] (b) Indique, justificadamente, para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ é possível garantir que todas as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ são limitadas para $t \in [0, +\infty[$.

Solução:

(a) Começamos por determinar os valores e vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O seu polinómio característico $\det(A - \lambda I)$ tem raízes:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-3 - \lambda)(1 - \lambda) + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0,$$

donde se conclui que existe apenas um único valor próprio, $\lambda = -1$, com multiplicidade algébrica 2.

Os vectores próprios são dados por

$$\det(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = 2v_2,$$

e daqui se conclui que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = -1$ é apenas 1, com um espaço próprio de dimensão 1, de vectores próprios da forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Não é possível, portanto, diagonalizar a matriz A, por faltar um vector independente para constituir uma base de vectores próprios. Teremos por isso que recorrer à forma canónica de Jordan e, a partir dela, obter a matriz exponencial de A.

Assim, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz de mudança de base, S, tal que

$$A = SJS^{-1},$$

com

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e a partir da qual se obtém a exponencial e^{At} como

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1},$$

com

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança de base, S, tem nas suas colunas os vectores da nova base,

$$S = \begin{bmatrix} 2 & w_1 \\ 1 & w_2 \end{bmatrix},$$

o primeiro dos quais é o vector próprio já determinado, restando obter o vector próprio generalizado (w_1, w_2), pela equação

$$\det(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2w_2 = 1 + w_1.$$

Escolhendo, por exemplo, $w_1 = -1$, obtemos $w_2 = 0$ e assim

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Temos todos os elementos para finalmente calcular a exponencial

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (1+2t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

A solução do problema de valor inicial do sistema homogéneo é agora dado por $e^{A(t-t_0)}\mathbf{y_0}$, sendo $t_0 = 0$ e $\mathbf{y_0} = (1, 1)$, ou seja

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & (1+2t)e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+2t)e^{-t} \\ (1+t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

(b) Para a matriz geral

$$\begin{bmatrix} -3 & \alpha \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

os valores próprios são

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-3 - \lambda)(1 - \lambda) + \alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 + \alpha = 0,$$

ou seja

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{4 - \alpha}.$$

Para $\alpha < 4$ os valores próprios são reais, $\lambda_1 = -1 + \sqrt{4-\alpha}$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{4-\alpha}$. A solução geral do sistema é uma combinação linear de $e^{\lambda_1 t}\mathbf{v_1}$ e $e^{\lambda_2 t}\mathbf{v_2}$, com $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ vectores próprios (linearmente independentes) associados a λ_1 e λ_2, respectivamente (que são diferentes). As componentes das soluções serão por isso combinações lineares de $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ que, portanto, serão limitadas para $t \geq 0$ se e só se os valores próprios forem ambos menores ou iguais a zero (no caso de valor próprio nulo a correspondente exponencial é constante pelo que também é limitada). Mas λ_2 é sempre negativo, pelo que a restrição resume-se a $\lambda_1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-\alpha} \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq 3$.

Para $\alpha = 4$ estamos na situação da alínea anterior, com um só valor próprio $\lambda = -1$ de multiplicidade algébrica 2. Pela matriz exponencial calculada atrás concluímos que as componentes da solução geral, neste caso, são combinações lineares de e^{-t} e te^{-t}, ambas limitadas para $t \geq 0$, visto que tendem para 0 quando $t \to \infty$.

Por fim, no caso $\alpha > 4$, ambos os valores próprios serão complexos conjugados $\lambda_1 = -1 \pm \mathrm{i}\sqrt{\alpha - 4}$. As componentes da solução geral serão combinações lineares de $e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{\alpha-4}\,t)$ e $e^{-t}\cos(\sqrt{\alpha-4}\,t)$, pelo que as soluções são limitadas para $t \geq 0$.

Conclui-se assim que as soluções são todas garantidamente limitadas para $t \geq 0$ quando $\alpha \geq 3$.