DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2024/2025

2º Teste - Versão B

28 de Novembro de 2024

Cursos: LMAC e LEFT

---

1. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = 3 - 2y - y^2.$$

[3,0 val] (a) Esboce o campo de direcções e trace os diferentes tipos de soluções.

[1,0 val] (b) Determine os pontos de equilíbrio e indique, justificando, se são estáveis ou instáveis.

[5,0 val] (c) Obtenha explicitamente a solução do problema de valor inicial $y(0) = -5$ e indique o seu intervalo máximo de definição.

[2,0 val] (d) Sem resolver a equação, argumente que o problema de valor inicial $y(0) = 0$ tem solução única e indique qual o seu intervalo máximo de definição.

Solução:

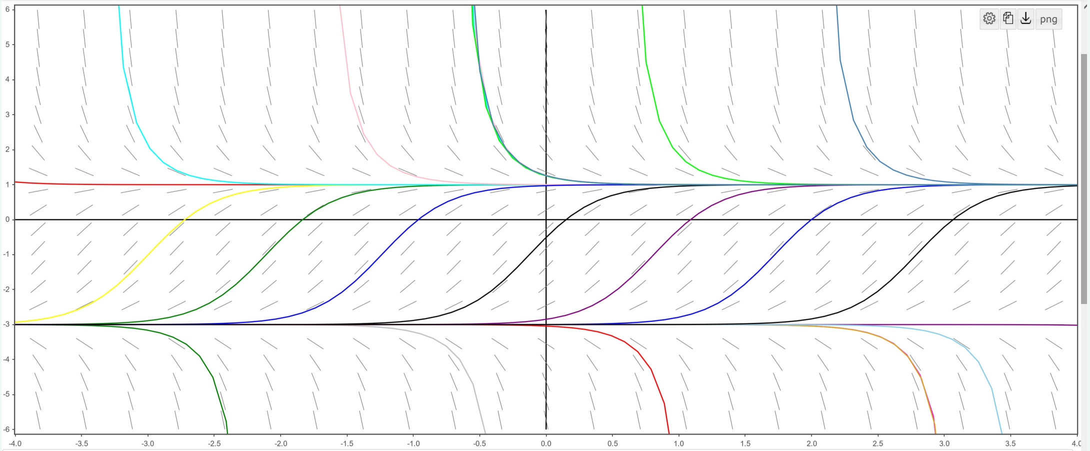
(a) O domínio da equação é todo o $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, onde a função $f(t, y) = 3 - 2y - y^2$ é infinitamente diferenciável e são válidas, portanto, as hipóteses do Teorema de Picard-Lindelöf, que garantem existência e unicidade (não cruzamento) das soluções.

A equação é autónoma, visto que a derivada da solução depende apenas do valor (da posição) y e não depende explicitamente do instante de tempo t. Assim, as inclinações do campo de direções, no plano ty, dependem só do valor de y, sendo paralelas para todo o t. As soluções serão também paralelas, dependendo apenas do valor $y(t_0)$ da sua condição inicial.

Como é habitual, para equações autónomas, começamos então por determinar os valores de y para os quais as soluções têm derivada nula. Estes correspondem aos valores das soluções constantes no tempo (os pontos de equilíbrio da alínea seguinte):

$$3 - 2y - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = 1 \vee -3.$$

Entre os pontos de equilíbrio a derivada pode apenas ter um dos sinais, ou positivo ou negativo porque, pelo teorema do valor intermédio para funções contínuas, se tivesse os dois sinais e transitasse de sinal entre dois pontos y teria de haver um outro zero entre eles, o que é impossível. Sendo um polinómio de grau 2, com coeficiente de y^2 negativo, ou seja, concavidade voltada para baixo, conclui-se imediatamente que entre os zeros $-3 < y < 1$ se tem $3 - 2y - y^2 > 0$, ou seja, a solução $y(t)$ será crescente, e fora dos zeros $y < -3$ ou $y > 1$ tem-se $3 - 2y - y^2 < 0$ e portanto aí $y(t)$ é decrescente. . Isto é suficiente para esboçar o campo de direções e alguns tipos de soluções



(b) Já se viu, na alínea anterior, que os pontos de equilíbrio desta equação autónoma são as soluções constantes $y(t) = 1$ e $y(t) = -3$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. Resta analisar a sua estabilidade. Mas esta é evidente, até observando o campo de direções e o esboço das soluções:

- a solução constante $y(t) = 1$ é um ponto de equilíbrio estável porque pequenas perturbações das condições iniciais em torno dela fazem as soluções convergir de volta para ela quando $t \to +\infty$.
- a solução constante $y(t) = -3$ é um ponto de equilíbrio instável visto que pequenas perturbações das condições iniciais em torno dela fazem as soluções afastar-se dela, ou para o ponto de equilíbrio estável $y(t) \to 1$, ou para menos infinito $y(t) \to -\infty$, quando t aumenta.

(c) A equação é evidentemente separável. Com a condição inicial dada $y(0) = -5$ esta solução não é evidentemente nenhuma das duas soluções de equilíbrio $y(t) = 1$ ou $y(t) = -3$ as quais, da unicidade garantida pelo teorema de Picard-Lindelöf, são as únicas que anulam $3 - 2y - y^2$. Portanto, a solução pedida - que também sabemos existir e ser única, pelo mesmo teorema - está na região em que $3 - 2y - y^2 < 0$ para todo o seu tempo de existência e isso permite reescrever a equação de forma equivalente como

$$\frac{1}{3 - 2y - y^2} \frac{dy}{dt} = 1$$

sem o risco do denominador se anular.

Fatorizando agora o polinómio $3 - 2y - y^2 = (1 - y)(y + 3)$ podemos separar a fração em frações simples

$$\frac{1}{3 - 2y - y^2} = \frac{1}{(1 - y)(y + 3)} = \frac{1/4}{y + 3} + \frac{1/4}{1 - y},$$

pelo que podemos escrever a EDO como

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{y(t) + 3} + \frac{1}{1 - y(t)}\right)\frac{dy}{dt} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\log|y(t) + 3| - \log|1 - y(t)|\Big) = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\log\left|\frac{y(t) + 3}{1 - y(t)}\right| = 4.\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados desta última equação entre $t_0 = 0$ e t obtém-se finalmente

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0=0}^{t} \frac{d}{ds} \log\left|\frac{y(s)+3}{1-y(s)}\right| ds = \int_{t_0=0}^{t} 4\, ds \\
\Leftrightarrow\quad & \log\left|\frac{y(t)+3}{1-y(t)}\right| - \log\left|\frac{y(0)+3}{1-y(0)}\right| = 4t \\
\Leftrightarrow\quad & \log\left|\frac{y(t)+3}{1-y(t)}\right| = 4t + \log 1/3 \\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{y(t)+3}{1-y(t)}\right| = \frac{e^{4t}}{3} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{y(t)+3}{1-y(t)} = \pm\frac{e^{4t}}{3},
\end{aligned}$$

donde, usando a condição inicial $y(0) = -5$, se conclui que o sinal a escolher do lado direito é o negativo, e assim

$$\begin{aligned}
\frac{y(t)+3}{1-y(t)} = -\frac{e^{4t}}{3} \quad &\Leftrightarrow\quad y(t)+3 = -\frac{e^{4t}}{3} + \frac{e^{4t}}{3} y(t) \\
&\Leftrightarrow\quad y(t)\left(1 - \frac{e^{4t}}{3}\right) = -\left(\frac{e^{4t}}{3} + 3\right) \\
&\Leftrightarrow\quad y(t) = \frac{e^{4t}+9}{e^{4t}-3}.
\end{aligned}$$

Para determinar o intervalo máximo de definição desta solução basta ver que o denominador se anula, e portanto a solução explode, em $t = \frac{\log 3}{4} = \log 3^{1/4}$, pelo que, tendo condição inicial em $t_0 = 0$, o intervalo máximo é $t \in]-\infty, \log 3^{1/4}[$.

(d) Recorremos novamente ao teorema de Picard-Lindelöf, cujas condições já foram verificadas na resposta à alínea a): o domínio da equação é todo o $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, onde a função $f(t, y) = 3 - 2y - y^2$ é infinitamente diferenciável pelo que é contínua em (t, y), e localmente lipschitziana na variável y no domínio $\mathbb{R}^2$ todo também. Portanto, são válidas as hipóteses do Teorema de Picard-Lindelöf em todos os pontos do domínio, o que garante existência e unicidade (não cruzamento) das soluções, para qualquer condição inicial $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Também sabemos, da alínea b), que as soluções de equilíbrio são as soluções constantes $y(t) = 1$ e $y(t) = -3$, ambas com intervalos máximos de definição $t \in \mathbb{R}$.

Por fim, a condição inicial indicada é $y(0) = 0$, que se situa entre as duas soluções constantes anteriores.

Ora, tendo em conta que as soluções desta EDO, que existem e são únicas pelo teorema de Picard-Lindelöf, podem ser prolongadas a intervalos máximos de existência em que, nos extremos desse intervalo, a solução tende para a fronteira do domínio - fronteira essa que, neste domínio $\mathbb{R}^2$, é o infinito em t ou y - e tendo em conta também que a solução não pode cruzar as soluções constantes $y(t) = 1$ e $y(t) = -3$, que se situam acima e abaixo da condição inicial, devido à garantia de unicidade, não pode então acontecer que $y(t) \to \pm\infty$ nos extremos do intervalo de existência, porque isso implicaria um tal cruzamento. Só pode então ser que a solução se prolongue até $t \to \pm\infty$, mantendo-se sempre entre os dois pontos de equilíbrio, donde o intervalo máximo de existência é $t \in]-\infty, \infty[$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5t^3 - 2x^3}{3tx^2}.$$

[6,0 val] (a) Determine a solução geral.

[3,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial $x(-1) = 2$ e indique o intervalo máximo de definição da correspondente solução.

Solução:

(a) As soluções desta EDO podem ser obtidas de duas formas. A primeira delas consistiria em notar que, dividindo o numerador e o denominador da fracção por t^3, a equação pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5 - 2(x/t)^3}{3(x/t)^2},$$

pelo que se trata duma equação da forma $x' = f(x/t)$ as quais, vimos em alguns problemas da ficha das aulas práticas da semana 7, podem ser transformadas em equações separáveis com recurso à substituição $v(t) = x(t)/t$.

Usaremos, no entanto, um outro método, de redução da equação a uma equação exacta. De facto, reescrevendo-a como

$$2x^3 - 5t^3 + 3tx^2\frac{dx}{dt} = 0,$$

começamos por confirmar que, nesta forma, ela não é exacta. Com efeito

$$\frac{\partial(2x^3 - 5t^3)}{\partial x} = 6x^2 \neq 3x^2 = \frac{\partial(3tx^2)}{\partial t},$$

pelo que o campo vectorial $(2x^3 - 5t^3, 3tx^2)$ não é fechado.

Tentamos agora reduzi-la a uma equação exacta, por multiplicação dum factor integrante $\mu(x)$ ou $\mu(t)$, dependente apenas de uma das variáveis. Sabemos, das aulas teóricas, que a EDP dum factor integrante geral de duas variáveis $\mu(x,t)$ se reduz, no caso $\mu = \mu(x)$ à EDO:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M}\mu(x).$$

No nosso caso o coeficiente desta equação é

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M} = \frac{3x^2 - 6x^2}{2x^3 - 5t^3} = -\frac{3x^2}{2x^3 - 5t^3},$$

que evidentemente não é uma função apenas de x. Pelo que não existe factor integrante $\mu = \mu(x)$.

Tentamos agora a outra alternativa, uma factor integrante só função de t, $\mu = \mu(t)$, cuja EDO será

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu(t),$$

com coeficiente

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{6x^2 - 3x^2}{3tx^2} = \frac{1}{t}.$$

Neste caso sim, é possível encontrar um factor integrante $\mu = \mu(t)$, satisfazendo então a equação

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{t}\,\mu(t),$$

cuja solução é facilmente dada, por exemplo, por $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}dt} = t$.
Multiplicando a nossa EDO por t obtém-se então

$$2tx^3 - 5t^4 + 3t^2x^2\frac{dx}{dt} = 0,$$

a qual já satisfaz

$$\frac{\partial(2tx^3 - 5t^4)}{\partial x} = 6tx^2 = \frac{\partial(3t^2x^2)}{\partial t},$$

pelo que tendo o campo vectorial $(2tx^3 - 5t^4, 3t^2x^2)$ por domínio todo o plano $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo, conclui-se que o campo vectorial é gradiente em $\mathbb{R}^2$ e a equação agora está na forma exacta.
Procuramos então agora um potencial $\phi(t,x)$ cujo gradiente seja o campo $(2tx^3 - 5t^4, 3t^2x^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 2tx^3 - 5t^4, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 3t^2x^2. \end{cases}$$

integrando a primeira destas equações em t obtém-se $\phi(t,x) = t^2x^3 - t^5 + \alpha(x)$ e substituindo na segunda equação

$$\frac{\partial(t^2x^3 - t^5 + \alpha(x))}{\partial x} = 3t^2x^2 \Leftrightarrow 3t^2x^2 + \alpha'(x) = 3t^2x^2 \Leftrightarrow \alpha'(x) = 0,$$

pelo que concluímos que a função $\alpha(x)$ é constante e o potencial é

$$\phi(t,x) = t^2x^3 - t^5 + C.$$

A solução geral, na forma implícita, é assim:

$$t^2x^3 - t^5 = C,$$

a qual pode ser explicitada como

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{C + t^5}{t^2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) A partir da solução, na forma implícita ou explícita, da alínea anterior, temos que a constante C para a condição inicial dada $x(-1) = 2$ é $C = (-1)^2 2^3 - (-1)^5 = 9$.
A solução explícita do PVI é assim

$$x(t) = \sqrt[3]{\frac{9 + t^5}{t^2}}.$$

Desta fórmula explícita vemos imediatamente que t não pode anular-se, por causa do denominador t^2. A própria função também não se pode anular, porque a raíz cúbica perde a diferenciabilidade em zero com derivada infinita, ou seja, $t^5 \neq -9$. Observe-se que a mesma conclusão poderia ser imediatamente tirada da EDO na forma canónica visto o denominador $3tx^2$ obrigar a que $t \neq 0$ e $x \neq 0$. Assim, seleccionando o intervalo máximo (aberto) que satisfaz estas restrições e que contém o instante inicial em $t_0 = -1$ conclui-se que é

$$t \in]-\sqrt[5]{9}\,, 0\,[.$$