DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2024/2025

1º Teste - Versão A

17 de Outubro de 2024

Cursos: LMAC e LEFT

---

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + z^2 = 9, \quad x + y - w = 0, \quad 0 < y < 3\}.$$

[3,0 val] (a) Prove que M é uma variedade e indique a sua dimensão d.

[2,0 val] (b) Indique uma parametrização para M.

[3,0 val] (c) Determine os espaços tangente T_pM e normal $N_pM = (T_pM)^\perp$ a M no ponto $p = (3, 1, 0, 4)$.

[3,0 val] (d) Determine o correspondente elemento de volume d-dimensional e calcule o valor do integral $\int_M f$ sobre M em que f é o campo escalar dado por

$$f(x, y, z, w) = \frac{y^2}{\sqrt{2 + (z/3)^2}}.$$

Solução:

(a) Usaremos as equações $x^2 + z^2 = 9$ e $x + y - w = 0$ para provar que M é uma variedade de dimensão 2 mergulhada em $\mathbb{R}^4$.

Assim, considerando o conjunto aberto $A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 0 < y < 3\}$ verificamos que M consiste exactamente dos pontos de A que satisfazem ambas as equações, ou seja $M = M \cap A = \{(x, y, z, w) \in A : x^2 + z^2 - 9 = 0, \quad x + y - w = 0\}$. Portanto A serve de vizinhança aberta de qualquer dos pontos de M para a definição de variedade a partir da equação cartesiana/conjunto de nível, que normalmente requereria uma vizinhança para cada ponto individual. Não aqui: um só aberto A serve para todos.

Por outro lado, a função $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{F}(x, y, z, w) = (x^2 + z^2 - 9, x + y - w)$ é de classe $C^\infty(A)$, por ser polinomial, e a sua matriz jacobiana é

$$D\mathbf{F}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 2z & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

de onde se conclui que a sua característica, nos pontos de $M = M \cap A$, é sempre 2 (basta notar que nos pontos de M sempre se tem x ou z não nulos, pelo que as duas linhas de $D\mathbf{F}$ são linearmente independentes). Conclui-se, portanto, que $M = \{(x, y, z, w) \in A : \mathbf{F}(x, y, z, w) = 0\}$ é uma variedade infinitamente diferenciável de dimensão 4-2=2.

(b) A variedade M, mesmo que não sendo possível visualizá-la, por ser um subconjunto de $\mathbb{R}^4$, é ainda assim de fácil compreensão: trata-se dum cilindro de raio 3 nas variáveis x e z intersectado por um plano $w = x + y$.

Para parametrizar o cilindro usamos as habituais coordenadas polares, por exemplo $x = 3\cos\theta$ e $z = 3\operatorname{sen}\theta$. Depois, para o plano $w = x + y$, a coordenada x já vem dada pelas coordenadas polares do cilindro, enquanto y é uma variável livre entre 0 e 3. A coordenada w é, portanto, a resultante da soma destas duas.

Assim, uma parametrização é, por exemplo

$$g(\theta, y) = (3\cos\theta, y, 3\operatorname{sen}\theta, 3\cos\theta + y),$$

com $\theta \in]-\pi, \pi[$ e $y \in]0, 3[$. (Claro que, como sempre nas parametrizações de cilindros e esferas, esta parametrização não cobre totalmente a variedade, porque fica a faltar uma curva correspondente ao ângulo $\theta = -\pi = \pi$, que obrigaria a cobrir com outra parametrização análoga, mas com $\theta \in]0, 2\pi[$, por exemplo, mas que é irrelevante para as integrações por se tratar dum conjunto de medida nula.)

A aplicação g é evidentemente injetiva, com inversa contínua, e a matriz jacobiana da parametrização

$$Dg = \begin{bmatrix} -3\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ 3\cos\theta & 0 \\ -3\operatorname{sen}\theta & 1 \end{bmatrix},$$

tem as duas colunas, correspondentes a $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$, linearmente independentes em todos os pontos $\theta \in]-\pi, \pi[$ e $y \in]0, 3[$ (bastando para isso ver, por exemplo, que a primeira e terceira entradas de $\frac{\partial g}{\partial \theta}$, $-3\operatorname{sen}\theta$ e $3\cos\theta$, nunca são simultaneamente nulas).

(c) O espaço tangente T_pM, que tem dimensão igual à da variedade, ou seja, 2, obtém-se imediatamente como o espaço gerado pelas colunas da matriz jacobiana da parametrização, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$, determinadas na alínea anterior. O ponto $p = (3, 1, 0, 4)$ da variedade corresponde às coordenadas $\theta = 0$ e $y = 1$ da parametrização (note-se que aqui não se poderia utilizar a parametrização análoga, mas com domínio $\theta \in]0, 2\pi[$, por não cobrir o ponto), pelo que uma base do espaço tangente nesse ponto são os vectores

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(0, 1) = (0, 0, 3, 0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(0, 1) = (0, 1, 0, 1),$$

e o espaço tangente T_pM em $p = (3, 1, 0, 4)$ é, portanto, o espaço vectorial de dimensão 2 gerado por estes dois vectores:

$$T_pM = \{\alpha(0, 0, 3, 0) + \beta(0, 1, 0, 1) = (0, \beta, 3\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

O espaço normal $N_pM = (T_pM)^\perp$ é, por sua vez, o espaço vectorial de dimensão $4 - 2 = 2$ gerado pelas linhas da matriz jacobiana $D\mathbf{F}$ da alínea a). Obtém-se assim, no ponto $p = (3, 1, 0, 4)$,

$$N_pM = (T_pM)^\perp = \{\alpha(6, 0, 0, 0) + \beta(1, 1, 0, -1) = (6\alpha + \beta, \beta, 0, -\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Observe-se também que se poderia obter o espaço normal só pela parametrização, sem recurso à matriz $D\mathbf{F}$, determinando apenas o complemento ortogonal de T_pM e, analogamente, poder-se-ia obter o espaço tangente só pela função implícita $\mathbf{F}$ da alínea a), sem recurso à parametrização, determinando apenas o complemento ortogonal de $N_pM = (T_pM)^\perp$.

(d) Tratando-se duma variedade de dimensão 2 mergulhada em $\mathbb{R}^4$ o elemento de área não pode ser obtido pela norma do produto externo, mas pela fórmula geral dada pela raíz do determinante da matriz da métrica $\sqrt{\det Dg^T Dg}$.

Com a parametrização da alínea b) a matriz da métrica obtém-se facilmente através dos produtos internos dos dois elementos da base do espaço tangente:

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta} & \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + 9\operatorname{sen}^2\theta & -3\operatorname{sen}\theta \\ -3\operatorname{sen}\theta & 2 \end{bmatrix},$$

donde o elemento de área é

$$\sqrt{\det Dg^T Dg} = \sqrt{18 + 9\mathrm{sen}^2\theta} = 3\sqrt{2 + \mathrm{sen}^2\theta}.$$

Por fim, o integral $\int_M f$ pedido é calculado com recurso à parametrização e a este elemento de área, pela fórmula

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^3 f(g(\theta, y))\sqrt{\det Dg^T Dg}\, dyd\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^3 \frac{y^2}{\sqrt{2 + (3\operatorname{sen}\theta/3)^2}}\ 3\sqrt{2 + \mathrm{sen}^2\theta}\, dyd\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^3 3y^2\, dyd\theta = 2\pi y^3\Big|_0^3 = 54\pi.$$

[6,0 val] 2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + z^2} - 4)^2 + y^2 = 1, \quad y < 0\}.$$

Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de

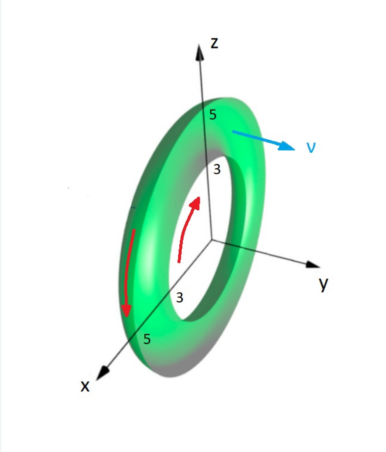
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\operatorname{sen} y - z, (xz)^{2024}, (y + 1)x),$$

através de S, na direção da normal com a segunda componente positiva.

Solução: A superfície S é a metade $y < 0$ dum toro orientado segundo o eixo dos yy, com raio interior 3 e raio exterior 5. O bordo ∂S é composto por duas circunferências no plano xz, de raios 3 e 5. Para a aplicação do teorema de Stokes,

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F} \cdot \nu\, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma,$$

dada a orientação da superfície com a normal ν com componente y positiva, a circunferência de raio 3 do bordo terá de ser percorrida no sentido horário, e a de raio 5 no sentido anti-horário, quando observadas a partir do eixo positivo dos yy, como indicado na figura seguinte:



Para o cálculo dos integrais de linha de $\mathbf{F}$ ao longo do bordo é necessário, portanto, parametrizar estas duas circunferências de forma a serem percorridas com a orientação indicada. Chamando γ_3 e γ_5 às parametrizações das circunferências, respetivamente, de raio 3 e 5, temos:

$$\gamma_3(\theta) = (3\cos\theta, 0, 3\operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad \gamma_5(\theta) = (5\operatorname{sen}\theta, 0, 5\cos\theta),$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$ em ambos os casos. Temos assim que, pelo teorema de Stokes, o fluxo do rotacional de $\mathbf{F}$ é dado por

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\nu\, dS = \oint_{\gamma_5}\mathbf{F}\cdot d\gamma_5 + \oint_{\gamma_3}\mathbf{F}\cdot d\gamma_3$$
$$= \int_0^{2\pi}((\operatorname{sen}0 - 5\cos\theta, (25\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{2024}, (0+1)5\operatorname{sen}\theta))\cdot(5\cos\theta, 0, -5\operatorname{sen}\theta)d\theta$$
$$+ \int_0^{2\pi}((\operatorname{sen}0 - 3\operatorname{sen}\theta, (9\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^{2024}, (0+1)3\cos\theta))\cdot(-3\operatorname{sen}\theta, 0, 3\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} -25\cos^2\theta - 25\operatorname{sen}^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} 9\operatorname{sen}^2\theta + 9\cos^2\theta d\theta$$
$$= -50\pi + 18\pi = -32\pi.$$

[3,0 val] 3. Seja ϕ um campo escalar não nulo, de classe $C^2(\Omega)$, em que Ω é um aberto que contém a bola unitária centrada na origem $B_1(0) \subset \Omega$. Sabendo que

$$\|\nabla\phi\|^2 = 5\,\phi \qquad \text{e} \qquad \operatorname{div}(\phi\nabla\phi) = 10\,\phi$$

determine o valor do integral de superfície

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \nabla\phi\cdot\nu\, dS,$$

em que $\mathbb{S}^2 = \partial B_1(0)$ é a esfera unitária centrada na origem e ν a sua normal unitária exterior.

Solução: Evidentemente, tratando-se do fluxo para o exterior do campo vectorial $\nabla\phi$ através da superfície duma esfera, a ideia será usar o teorema da divergência para esse campo, na bola unitária.

Assim, sendo ϕ de classe C^2 na bola unitária, podemos então aplicar o teorema da divergência e tem-se

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \nabla\phi \cdot \nu \, dS = \iiint_{B_1(0)} \Delta\phi \, dV,$$

onde usámos o facto que a divergência do gradiente é o Laplaciano, $\operatorname{div}(\nabla\phi) = \Delta\phi$.

Por outro lado, usando as propriedades da divergência

$$\operatorname{div}(\phi\nabla\phi) = \nabla\phi \cdot \nabla\phi + \phi \operatorname{div}(\nabla\phi) = \|\nabla\phi\|^2 + \phi\Delta\phi,$$

e os dados indicados no enunciado, $\|\nabla\phi\|^2 = 5\,\phi$ e $\operatorname{div}(\phi\nabla\phi) = 10\,\phi$, concluímos que

$$\phi\Delta\phi = \operatorname{div}(\phi\nabla\phi) - \|\nabla\phi\|^2 = 10\phi - 5\phi = 5\phi.$$

Por fim, usamos o facto também indicado que ϕ é um campo escalar não nulo, pelo que podemos então dividir ambos os lados por ϕ e obter

$$\Delta\phi = 5,$$

donde

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \nabla\phi \cdot \nu \, dS = \iiint_{B_1(0)} \Delta\phi \, dV = 5\mathsf{Vol}(B_1(0)) = \frac{20}{3}\pi.$$