DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2021/2022

Cursos: LMAC e LEFT

1º Exame - Versão A

10 de Fevereiro de 2022

1. Determine a solução geral da equação diferencial ordinária

$$y''' + 4y' = b(t),$$

em cada um dos seguintes casos

(1,0 val) (a) $b(t) = 0$

(1,5 val) (b) $b(t) = 4t^3 - 12t^2$

(1,5 val) (c) $b(t) = \begin{cases} 4 & \text{se} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

(1,5 val) (d) $b(t) = -4\delta(t-3)$

Solução:

(a) Nesta primeira alínea pede-se a solução geral da equação homogénea. A equação é de ordem 3 pelo que o espaço vetorial das soluções tem dimensão 3 e portanto são necessárias três soluções linearmente independentes para obter uma base do espaço das soluções e com elas gerar as soluções todas. A equação pode ser escrita como $(D^3+4D)y = 0 \Leftrightarrow D(D^2+4)y = 0$. Conclui-se então que os valores próprios do sistema de primeira ordem equivalente, ou seja, os zeros do polinómio característico, são $0, \pm 2i$ pelo que a solução geral, obtida pela combinação linear arbitrária das correspondentes três soluções reais linearmente independentes é

$$y(t) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}(2t) + c_3 \cos(2t), \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Sabemos que a solução geral do problema não homogéneo resulta da soma de uma solução particular não homogénea a todas as soluções homogéneas, as quais foram obtidas na alínea anterior,

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}(2t) + c_3 \cos(2t) + y_P(t).$$

O termo não homogéneo da equação $4t^3 - 12t^2$ é solução da equação homogénea $D^4 y = 0$ pelo que podemos usar o método dos aniquiladores, aplicando este operador D^4 aos dois lados da equação original e assim obtendo a equação homogénea aumentada, da qual a solução particular é solução

$$\begin{aligned} D(D^2+4)y_P = 4t^3 - 12t^2 &\Rightarrow D^4 D(D^2+4)y_P = D^4[4t^3 - 12t^2] \\ &\Rightarrow D^5(D^2+4)y_P = 0. \end{aligned}$$

Ou seja y_P é da forma geral $y_P(t) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}(2t) + c_3 \cos(2t) + c_4 t + c_5 t^2 + c_6 t^3 + c_7 t^4$. Mas como os termos relativos a c_1, c_2, c_3 vimos já que são os da solução homogénea original, podemos assim procurar

$$y_P(t) = c_4 t + c_5 t^2 + c_6 t^3 + c_7 t^4.$$

Resta assim determinar os valores específicos das constantes c_4, c_5, c_6 e c_7 que permitem obter o termo não homogéneo específico $4t^3 - 12t^2$ do lado direito da equação original. Substituindo

$$y_P''' + 4y_P' = 4t^3 - 12t^2,$$

obtemos

$$\begin{aligned}(6c_6 + 24c_7 t) + 4(c_4 + 2c_5 t + 3c_6 t^2 + 4c_7 t^3) &= \\ = (6c_6 + 4c_4) + (24c_7 + 8c_5)t + 12c_6 t^2 + 16c_7 t^3 &= \\ = 4t^3 - 12t^2&,\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned} 16c_7 = 4 \Rightarrow c_7 &= \frac{1}{4}, \\ 12c_6 = -12 \Rightarrow c_6 &= -1, \\ 24c_7 + 8c_5 = 0 \Rightarrow c_5 &= -\frac{3}{4}, \\ 6c_6 + 4c_4 = 0 \Rightarrow c_4 &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

e que portanto a solução geral do problema não homogéneo é

$$y(t) = c_1 + c_2 \operatorname{sen}(2t) + c_3 \cos(2t) + \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2 - t^3 + \frac{1}{4}t^4,$$

para constantes arbitrárias $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Nesta alínea usaremos a transformação de Laplace para obter a solução particular da equação para o termo não homogéneo

$$b(t) = \begin{cases} 4 & \text{se} \quad 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = 4(H(t-1) - H(t-2)),$$

onde $H(t)$ designa a função de Heaviside centrada na origem.

Assim aplicando a transformação de Laplace à equação e ignorando as condições iniciais, cujas constantes correspondem a combinações lineares da parte homogénea da solução, ou seja, considerando a solução particular não homogénea para condições iniciais nulas, obtemos

$$s^3 Y(s) + 4sY(s) = B(s) = 4\left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\right),$$

onde usámos as propriedades da transformada de Laplace de translações da função de Heaviside, no lado direito desta equação. Assim, a transformada de Laplace desta solução particular não homogénea é dada por

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s^2+4)}(e^{-s} - e^{-2s}).$$

Separamos agora em frações simples

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4},$$

onde facilmente se obtém $A = 0, B = 1, C = 0$ e $D = -1$,

$$\frac{4}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4},$$

cuja transformada de Laplace inversa é $t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$, e portanto, tendo em conta os termos $(e^{-s} - e^{-2s})$, obtemos uma solução particular não homogénea

$$H(t-1)\big((t-1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-1))\big) - H(t-2)\big((t-2) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-2))\big),$$

sendo a solução geral obtida pela soma de todas as soluções homogéneas da alínea (a) a esta solução particular.

(d) Este último caso é inteiramente análogo ao anterior, mas com delta de Dirac em vez de funções de Heaviside.

Assim, a solução particular obtida pela transformada de Laplace, ignorando as condições iniciais (ou seja, determinando a solução particular não homogénea correspondendo a condições iniciais nulas) dá

$$s^3Y(s) + 4sY(s) = B(s) = -4e^{-3s},$$

onde usámos a propriedade que a transformada de Laplace do delta de Dirac localizado em $x = 3$ é e^{-3s}.

Portanto, a transformada de Laplace desta solução particular não homogénea satisfaz

$$Y(s) = \frac{-4}{s(s^2+4)}e^{-3s},$$

e separando de novo em frações simples

$$\frac{-4}{s(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+4},$$

obtendo-se agora $A = -1, C = 1$ e $D = 0$,

$$\frac{-4}{s(s^2+4)} = \frac{-1}{s} + \frac{s}{s^2+4},$$

cuja inversa de Laplace é $-1 + \cos 2t$. E, tendo em conta o termo e^{-3s} concluimos que a solução particular para condições iniciais nulas é

$$H(t-3)(-1 + \cos(2(t-3))),$$

e a solução geral é obtida também pela soma de todas as soluções homogéneas da alínea (a) a esta solução particular.

(2,0 val) 2. Obtenha explicitamente a solução do problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t(2y-1)}{y-t^2}, \qquad y(\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2},$$

e indique o seu intervalo máximo de definição.

Solução: Escrevendo a equação como

$$(t-2ty) + (y-t^2)\frac{dy}{dt} = 0,$$

logo se conclui que ela está escrita na forma exata, pois, chamando

$$M(t,y) = t-2ty \qquad \text{e} \qquad N(t,y) = y-t^2,$$

observa-se que o domínio do campo vetorial $(M(t,y), N(t,y))$ é todo o $\mathbb{R}^2$, por ser polinomial, e portanto é simplesmente conexo, e além disso tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2t = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Assim, podemos concluir que $(M(t,y), N(t,y))$ é um campo gradiente, ou seja, existe um potencial $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$, ou seja, a equação pode ser escrita como

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \Phi(t, y(t)) = C.$$

Para encontrar Φ resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = M(t,y) = t-2ty \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(t,y) = y-t^2. \end{cases}$$

Integrando em t a primeira destas equações obtém-se $\Phi(t,y) = \frac{t^2}{2} - t^2 y + \alpha(y)$, para alguma função $\alpha(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. E substituindo este $\Phi(t,y)$ na segunda equação, $-t^2 + \alpha'(y) = y - t^2$, donde $\alpha(y) = \frac{y^2}{2} + C$.

Conclui-se assim que a solução geral da equação, na forma implícita, é dada por

$$y^2 - 2t^2 y + t^2 = C.$$

Substituindo a condição inicial $y = 2-\sqrt{2}$ em $t = \sqrt{2}$ permite-nos obter o valor da constante $C = (2-\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})^2(2-\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 4-4\sqrt{2}+2-4(2-\sqrt{2})+2 = 0$. Portanto, a solução do problema de valor inicial na forma implícita é

$$y^2 - 2t^2 y + t^2 = 0,$$

o qual pode facilmente ser explicitado usando a fórmula resolvente

$$y(t) = \frac{2t^2 \pm \sqrt{4t^4 - 4t^2}}{2} = t^2 \pm \sqrt{t^4 - t^2}.$$

A condição inicial $y(\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}$ imediatamente leva à escolha do sinal $-$ na fórmula anterior, donde, finalmente se obtém a única solução

$$y(t) = t^2 - \sqrt{t^4 - t^2}.$$

Por fim, o intervalo máximo de definição desta solução é determinado escolhendo-se o maior intervalo aberto para o qual $t^4 - t^2 = t^2(t^2-1) > 0$ e isso seria $t < -1$ ou $t > 1$. Mas destes, o que contém o instante de tempo inicial $t_0 = \sqrt{2}$ é evidentemente o segundo, donde

$$t \in]1, +\infty[.$$

O extremo $t = 1$ não pode ser incluído, porque o intervalo não seria aberto nesse caso e, pior, a raíz quadrada da fórmula da solução teria derivada infinita, pelo que a solução não seria diferenciável nesse ponto, como se exige da definição de solução duma EDO.

3. Considere a função f definida no intervalo $[0, 2]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

(2,0 val) (a) Determine a série de Fourier de senos de f e indique justificadamente o valor da sua soma para cada $x \in \mathbb{R}$.

(2,5 val) (b) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 6\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t^3 u & \text{para} \quad t > 0, \quad x \in \ ]0, 2[\\ u(0, t) \ = \ u(2, t) \ = \ 0, & \text{para} \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) \ = \ e^{3x} f(x), & \text{para} \quad x \in \ ]0, 2[\,. \end{cases}$$

Solução:

(a) Para obter um desenvolvimento de Fourier em série de senos, prolonga-se f ao intervalo $[-2, 0[$ de forma ímpar e obtém-se assim a sua série de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

em que $L = 2$ e os coeficientes b_n são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi n} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{\pi n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Como o prolongamento ímpar de f, em $[-2, 2]$, é seccionalmente C^1, com descontinuidades em $x = 0$ e $x = \pm 1$, o teorema de Fourier/Dirichlet da convergência pontual das séries de Fourier garante que a correspondente série de senos converge, em cada $x \in [-2, 2]$, para

$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ -1/2 & \text{se} \quad x = -1 \\ -1 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 1/2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 0 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Nos restantes pontos de $x \in \mathbb{R}$ a série converge para o prolongamento periódico, de período 4, desta função.

(b) Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, com $X(x)$ e $T(t)$ não identicamente nulas, para $0 \leq x \leq 2$ e $t \geq 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$X(x)T'(t) + 6X'(x)T(t) = X''(x)T(t) - t^3 X(x)T(t) \Leftrightarrow$$
$$\frac{T'(t)}{T(t)} + t^3 = \frac{X''(x)}{X(x)} - 6\frac{X'(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = (\lambda - t^3)T(t) \\ X''(x) - 6X'(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogénea para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t - \frac{t^4}{4}} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A segunda equação, de segunda ordem, que corresponde à determinação dos valores e funções próprias do operador $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - 6\dfrac{\partial}{\partial x}$ pode ser escrita como

$$(D^2 - 6D - \lambda)X = 0,$$

em que as raízes do polinómio característico são dadas por

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 + 4\lambda}}{2} = 3 \pm \sqrt{9 + \lambda},$$

pelo que as soluções dependem do sinal de $\lambda + 9$. Temos então

$$X(x) = \begin{cases} Be^{(3+\sqrt{\lambda+9})x} + Ce^{(3-\sqrt{\lambda+9})x} & \text{se } \lambda > -9 \\ Bxe^{3x} + Ce^{3x} & \text{se } \lambda = -9 \\ Be^{3x}\cos(\sqrt{-\lambda-9}\,x) + Ce^{3x}\,\text{sen}(\sqrt{-\lambda-9}\,x) & \text{se } \lambda < -9. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.
As condições de fronteira homogéneas $u(0,t) = u(2,t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas dizem que

$$X(0)T(t) = X(2)T(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(2) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > -9$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{(3+\sqrt{\lambda+9})2} + Ce^{(3-\sqrt{\lambda+9})2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = -9$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ B2e^6 + Ce^6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < -9$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ Be^6 \cos(\sqrt{-\lambda - 9}\, 2) + Ce^6 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda - 9}\, 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou} \\ 2\sqrt{-\lambda - 9} = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as soluções não nulas $X(x) = Ce^{3x} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$ com $n = 1, 2, \cdots$, para $\lambda = -9 - \frac{n^2\pi^2}{4}$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$Ae^{3x} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-9t - \frac{n^2\pi^2}{4}t - \frac{t^4}{4}}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$.
Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita"das soluções obtidas acima:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{3x} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-9t - \frac{n^2\pi^2}{4}t - \frac{t^4}{4}}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x,0) = e^{3x} f(x)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{3x} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = e^{3x} f(x)$$

pelo que os coeficientes c_n são os coeficientes da série de senos de f obtida na alínea anterior. Sendo assim

$$c_n = \frac{2}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

e portanto a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] e^{3x} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-9t - \frac{n^2\pi^2}{4}t - \frac{t^4}{4}}.$$

(2,0 val) 4. Use o método das características para obter a solução da equação diferencial parcial

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + (2x+y)\frac{\partial u}{\partial y} = u + x,$$

com condição inicial $u(1,y) = y^3$, para $y \in \mathbb{R}$.

Solução: Começaremos por determinar as curvas características, ao longo das quais a equação impõe a evolução da solução u. Elas são dadas pelo sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y, \end{cases}$$

com condições iniciais em $t = 0$ sobre a recta $(1, s)$, para $s \in \mathbb{R}$, ou seja, $x(t = 0; s) = 1$ e $y(t = 0; s) = s$. Resolvendo primeiro para x e depois para y, com o x já determinado, facilmente se obtém a solução

$$\begin{cases} x(t;s) = e^t \\ y(t;s) = se^t + 2te^t. \end{cases}$$

Assim, ao longo de cada curva característica, a equação diferencial parcial torna-se numa equação diferencial ordinária linear

$$\frac{du}{dt} = u + x = u + e^t,$$

com condição inicial $u(t = 0; s) = s^3$. A solução deste problema é dado por

$$u(t;s) = s^3e^t + te^t.$$

Finalmente fazendo a inversão de coordenadas entre (x, y) e (s, t) obtém-se

$$\begin{cases} x(t;s) = e^t \Leftrightarrow t = \log x \\ y(t;s) = se^t + 2te^t \Leftrightarrow y = sx + 2x\log x \Leftrightarrow s = \frac{y}{x} - 2\log x, \end{cases}$$

e portanto

$$u(x,y) = x\left(\frac{y}{x} - \log(x^2)\right)^3 + x\log x,$$

para $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.

(3,0 val) 5. Determine a solução do problema de valor inicial para o sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + e^{-t^3}y + e^{-t^3}z - 3 \\ y' = 4y + z \\ z' = -y + 2z - 6te^{3t}, \end{cases} \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0.$$

Solução: Começamos por escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & e^{-t^3} & e^{-t^3} \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -6te^{3t} \end{bmatrix},$$

sendo evidente que se trata de um sistema de equações diferenciais ordinárias linear não homogéneo, mas de coeficientes dependentes do tempo, na matriz, para os quais os métodos gerais de resolução não podem ser aplicados.

No entanto, é também óbvio que as equações para as componentes $y(t)$ e $z(t)$ estão desacopladas de $x(t)$ e podem ser resolvidas como um sistema 2×2 de coeficientes constantes, cujas soluções explícitas poderão ser posteriormente introduzidas na equação de $x(t)$ a qual poderá, no fim, ser resolvida simplesmente como uma equação escalar linear não homogénea.

Assim, passamos a olhar primeiro apenas para o sistema

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -6te^{3t} \end{bmatrix},$$

com condições iniciais nulas

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução será dada simplesmente pela fórmula da variação das constantes

$$e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds,$$

para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6te^{3t} \end{bmatrix}.$$

Começamos por procurar os valores próprios de A

$$(4-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0,$$

donde se pode imediatamente concluir que só há um valor próprio, $\lambda = 3$, com multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1 (visto que só seria 2, se a matriz 2×2 fosse diagonal). Os vetores próprios são da forma

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com as duas equações linearmente dependentes, como tem de acontecer, e qualquer uma delas dando $v_1 = -v_2$. A dimensão do espaço próprio é 1, confirmando a multiplicidade geométrica já prevista, e escolhemos

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Para obter a forma canónica de Jordan precisamos agora determinar um vetor próprio generalizado

$$(A - 3I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

donde $w_1 + w_2 = 1$ e escolhemos

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz S de mudança de base de A para a sua forma canónica de Jordan J será

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e tem-se assim

$$A = SJS^{-1} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Em posse da exponencial da matriz A podemos finalmente obter as soluções $y(t)$ e $z(t)$ pela fórmula da variação das constantes

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 0 \\ -6se^{3s} \end{bmatrix} =$$

$$= e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} (1-s)e^{-3s} & -se^{-3s} \\ se^{-3s} & (1+s)e^{-3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6se^{3s} \end{bmatrix} ds = e^{At} \int_0^t \begin{bmatrix} 6s^2 \\ -6s - 6s^2 \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} (1+t)e^{3t} & te^{3t} \\ -te^{3t} & (1-t)e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t^3 \\ -3t^2 - 2t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^3e^{3t} \\ (t^3 - 3t^2)e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Com $y(t)$ e $z(t)$ determinados, podemos por fim substituir na equação para $x(t)$ e resolver a correspondente equação diferencial ordinária de primeira ordem linear não homogénea

$$x' = 3x + e^{-t^3}(y + z) - 3 = 3x - 3t^2e^{-t^3}e^{3t} - 3.$$

Como habitualmente escrevemos a equação como

$$\frac{dx}{dt} - 3x = -3t^2e^{-t^3}e^{3t} - 3,$$

e procura-se o fator integrante $\mu(t)$ que transforma o lado esquerdo na derivada do produto

$$\frac{d(\mu x)}{dt} = \mu\frac{dx}{dt} + \frac{d\mu}{dt}x = \mu\frac{dx}{dt} - 3\mu x,$$

pelo que

$$\frac{d\mu}{dt} = -3\mu \Rightarrow \mu(t) = e^{-3t}.$$

E multiplicando toda a equação de $x(t)$ por este fator integrante, obtém-se

$$\frac{d(e^{-3t}x(t))}{dt} = -3t^2e^{-t^3} - 3e^{-3t},$$

que se integra imediatamente entre $t_0 = 0$ e t para obter

$$e^{-3t}x(t)\Big|_0^t = e^{-t^3}\Big|_0^t + e^{-3t}\Big|_0^t \Leftrightarrow e^{-3t}x(t) - x(0) = e^{-t^3} - 1 + e^{-3t} - 1,$$

concluindo-se finalmente que

$$x(t) = e^{-t^3+3t} - e^{3t} + 1.$$

6. Considere a equação das ondas para $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, com $c > 0$ constante,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(1,5 val) (a) Prove que, se $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução da equação das ondas se e só se existem funções $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ tais que $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$ (Sugestão: Use a mudança de coordenadas linear $\eta = x - ct$, $\xi = x + ct$ para reescrever a equação diferencial de forma equivalente nestas novas coordenadas).

(1,5 val) (b) Use a alínea anterior para provar existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, obtendo uma fórmula para u em termos das funções $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Solução:

(a) Se designarmos por $\tilde{u}(\eta,\xi)$ a função obtida por $u(x,t)$ pela mudança de variáveis sugerida, ou seja

$$\begin{cases} \eta = x - ct \\ \xi = x + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\eta+\xi}{2} \\ t = \frac{\xi-\eta}{2c}, \end{cases}$$

portanto

$$u(x,t) = \tilde{u}(\eta(x,t), \xi(x,t)) = \tilde{u}(x-ct, x+ct)$$
$$\Leftrightarrow \tilde{u}(\eta,\xi) = u(x(\eta,\xi), t(\eta,\xi)) = u(\frac{\eta+\xi}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}),$$

tem-se que $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ nas variáveis (x,t) se e só se $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ nas variáveis (η,ξ) e, pela regra da derivação da função composta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -c\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + c\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi},$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}.$$

Repetindo, para as segundas derivadas, obtém-se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} - 2c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2},$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}.$$

Pelo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} - 2c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} + c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2}\right),$$

ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow 4c^2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Portanto, $u(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução da equação das ondas se e só se $\tilde{u}(\eta,\xi) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ é solução de

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial\eta\partial\xi} = 0.$$

Finalmente, primitivando primeiro em η, por exemplo, e depois em ξ, obtém-se

$$\tilde{u}(\eta,\xi) = F(\eta) + G(\xi),$$

para algum par de funções $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ donde se conclui que ser solução da equação das ondas é equivalente a

$$u(x,y) = F(x-ct) + G(x+ct).$$

(b) Sabendo pela alínea anterior que $u(x,t) = F(x-ct)+G(x+ct)$, para acertar as condições iniciais fazemos em $t=0$

$$u(x,0) = f(x) = F(x) + G(x),$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) = -c\,F'(x) + c\,G'(x).$$

Pela segunda destas equações podemos deduzir, por integração, que

$$G'(x) - F'(x) = \frac{1}{c}g(x) \Rightarrow G(x) - F(x) - G(0) + F(0) = \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds.$$

Obtemos assim duas equações para F e G em termos de f e g. Para explicitá-las, podemos começar por somar esta última com a primeira e assim chegar a

$$\begin{aligned} 2G(x) &= G(0) - F(0) + f(x) + \frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds \\ &\Rightarrow G(x) = \frac{G(0)-F(0)}{2} + \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds. \end{aligned}$$

e substituindo numa delas, por exemplo na primeira, para obter F

$$F(x) = f(x) - G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{G(0)-F(0)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds.$$

Conclui-se finalmente que, necessariamente, a solução u é dada por

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

O facto desta fórmula final (conhecida como fórmula de D'Alembert) ser necessária, implica a unicidade visto que a solução do problema de valor inicial é obrigatoriamente dada por esta única função de x e t em termos dos dados iniciais f e g. Por outro lado, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ também é imediatamente evidente que esta fórmula define uma função $C^2(\mathbb{R}^2)$ em (x,t) e que satisfaz a equação das ondas, visto ser da forma $F(x-ct)+G(x+ct)$, e isso prova a existência.