

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

3º TESTE - VERSÃO B

4 DE JANEIRO DE 2024

CURSOS: LMAC E LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
 - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
 - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
 - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
 - Classificação de 0 a 20.
 - Duração: 45 minutos.
-
-

1. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e coeficientes constantes

$$\begin{cases} x' = -x + 2y + 2te^{-t} \\ y' = z + e^{-t} \\ z' = -y - 2z - e^{-t} \end{cases}$$

- [4,0 val] (a) Verifique que a exponencial matricial associada à parte homogénea do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & (t^2 + 2t)e^{-t} & t^2e^{-t} \\ 0 & (t + 1)e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & -te^{-t} & (1 - t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

- [4,0 val] (b) Determine uma solução particular do sistema não homogéneo.

- [2,0 val] 2. (a) Seja $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma $y(t) = e^{2t}v(t)$, com v de classe $C^2(I)$. Mostre que

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t}v''(t).$$

- [5,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2t}}{t^3}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

- [5,0 val] 3. Considere a equação do calor em duas dimensões espaciais, num disco de raio unitário $x^2 + y^2 \leq 1$, com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas, escrita em coordenadas polares para $u(r, \theta, t)$ como

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\ u(1, \theta, t) = 0, \quad \text{em } r = 1. \end{cases}$$

Usando o método de separação de variáveis, ou seja, assumindo soluções da forma $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, escreva as equações diferenciais ordinárias resultantes para $R(r)$, $\Theta(\theta)$, e $T(t)$, escrevendo também as condições de fronteira homogéneas que devem ser impostas às funções espaciais $R(r)$ e $\Theta(\theta)$.