DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral - III

## 1º Semestre 2023/2024

3º Teste - Versão A

4 de Janeiro de 2024

Cursos: LMAC e LEFT

---

[2,0 val] 1. (a) Seja $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $y(t) = e^{3t}v(t)$, com $v$ de classe $C^2(I)$. Mostre que

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t}v''(t).$$

[5,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3t}}{t^3}, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = 0.$$

**Solução:**

(a) Sendo $y(t) = e^{3t}v(t)$ com $v$ de classe $C^2$, basta calcular as derivadas de $y$ para verificar a igualdade. Assim

$$y'(t) = 3e^{3t}v(t) + e^{3t}v'(t),$$

e

$$y''(t) = 9e^{3t}v(t) + 6e^{3t}v'(t) + e^{3t}v''(t),$$

pelo que se obtém

$$\begin{aligned} &y'' - 6y' + 9y = \\ &\quad = \big(9e^{3t}v(t) + 6e^{3t}v'(t) + e^{3t}v''(t)\big) - 6\big(3e^{3t}v(t) + e^{3t}v'(t)\big) + 9e^{3t}v(t) = \\ &\qquad\qquad = e^{3t}v''(t), \end{aligned}$$

como se pede.

(b) Trata-se duma equação linear de segunda ordem, não homogénea, que não pode ser resolvida pelo método dos aniquiladores visto que o termo não homogéneo tem uma potência negativa de $t$ a multiplicar pela exponencial. Poder-se-ia, claro, resolver este problema pela fórmula da variação das constantes, com recurso à matriz Wronskiana. Mas usando a alínea anterior, a resolução pode ser feita de forma bem mais simples.

Em primeiro lugar, observamos que, tratando-se duma equação linear não homogénea, a sua solução geral é igual à soma de uma solução particular não homogénea com o espaço vetorial das soluções homogéneas (neste caso de dimensão 2, por se tratar duma equação de segunda ordem).

$$y(t) = y_h(t) + y_{part}(t).$$

O espaço vetorial das soluções homogéneas obtém-se pelas combinações lineares arbitrárias de duas soluções linearmente independentes - uma base do espaço das soluções - de

$$y_h'' - 6y_h' + 9y_h = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 6D + 9)y_h = 0 \Leftrightarrow (D-3)^2 y_h = 0.$$

Conclui-se assim que 3 é uma raíz de multiplicadade algébrica dupla do polinómio característico, ou seja, do operador diferencial linear, pelo que as duas soluções homogéneas linearmente independentes são $e^{3t}$ e $te^{3t}$ donde

$$y_h(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, uma solução particular não homogénea pode ser obtida com recurso à alínea anterior. Com efeito, sabemos que se $y$ for da forma $y(t) = e^{3t}v(t)$ então satisfaz a equação

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t}v''(t).$$

Neste caso, temos que o termo não homogéneo da nossa equação é $e^{3t}/t^3$ pelo que, portanto, queremos encontrar uma função $v$ tal que $v''(t) = 1/t^3$. Primitivando duas vezes, e fazendo as constantes de primitivação nulas, obtemos $v'(t) = -1/2t^2$ e $v(t) = 1/2t$. Concluímos, portanto, que

$$y_{part}(t) = \frac{e^{3t}}{2t},$$

é uma solução particular do problema não homogéneo, e que a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{e^{3t}}{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Resta, finalmente, acertar as condições iniciais do problema. Para isso

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 e^3 + c_2 e^3 + \frac{e^3}{2} = 0,$$

e

$$y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3c_1 e^3 + 4c_2 e^3 + \frac{3e^3}{2} - \frac{e^3}{2} = 0,$$

as quais, resolvendo em ordem a $c_1$ e $c_2$, dão $c_1 = -1$, $c_2 = 1/2$ chegando-se, portanto, à solução (única) do problema de valor inicial

$$y(t) = -e^{3t} + \frac{te^{3t}}{2} + \frac{e^{3t}}{2t} = \frac{(t-1)^2}{2t}e^{3t}.$$

2. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e coeficientes constantes

$$\begin{cases} x' = y + e^{-t} \\ y' = -x - 2y - e^{-t} \\ z' = 2x - z + 2te^{-t} \end{cases}$$

[4,0 val] (a) Verifique que a exponencial matricial associada à parte homogénea do sistema é dada

por

$$\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t^2+2t)e^{-t} & t^2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

[4,0 val] (b) Determine uma solução particular do sistema não homogéneo.

**Solução:**

(a) Pede-se apenas para verificar que a matriz dada é a exponencial matricial da parte homogénea do sistema. Este, na forma matricial, pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 2te^{-t} \end{bmatrix},$$

pelo que o objetivo é mostrar que a matriz dada é $e^{At}$, com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Relembramos que para verificar que uma matriz é a exponencial há que verificar que ela é a (única) solução matricial principal em $t_0 = 0$, ou seja, que satisfaz $\frac{d}{dt}Y_{t_0=0}(t) = AY_{t_0=0}(t)$, e que em $t = 0$ se tem $Y_{t_0=0}(0) = I$. Chamemos então $Y(t)$ à matriz dada

$$Y(t) = \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t^2+2t)e^{-t} & t^2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Para começar, é imediato que $Y(0) = I$. Resta provar que $\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t)$. Assim,

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \begin{bmatrix} -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t-1)e^{-t} & (t-2)e^{-t} & 0 \\ (2-t^2)e^{-t} & (2t-t^2)e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} AY(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t^2+2t)e^{-t} & t^2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t-1)e^{-t} & (t-2)e^{-t} & 0 \\ (2-t^2)e^{-t} & (2t-t^2)e^{-t} & -e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Está portanto verificado que $\frac{d}{dt}Y(t) = AY(t)$, e que, portanto, $Y(t) = e^{At}$.

(b) Com a matriz exponencial dada, basta simplesmente usar a formula da variação das constantes para encontrar uma solução particular não homogénea.

$$\mathbf{y}_p(t) = e^{At}\int e^{-At}\mathbf{b}(t)dt.$$

Começamos por calcular $e^{-At}\mathbf{b}(t)$,

$$e^{-At}\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)e^t & -te^t & 0 \\ te^t & (1+t)e^t & 0 \\ (t^2-2t)e^t & t^2e^t & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 2te^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} e^{At}\int e^{-At}\mathbf{b}(t)dt &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t^2+2t)e^{-t} & t^2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t^2+2t)e^{-t} & t^2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ -te^{-t} \\ 2t^2e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[5,0 val] 3. Considere a equação do calor em duas dimensões espaciais, num disco de raio unitário $x^2+y^2 \leq 1$, com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas, escrita em coordenadas polares para $u(r,\theta,t)$ como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \\ \\ u(1,\theta,t) = 0, \quad \text{em } r = 1. \end{cases}$$

Usando o método de separação de variáveis, ou seja, assumindo soluções da forma $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, escreva as equações diferenciais ordinárias resultantes para $R(r)$, $\Theta(\theta)$, e $T(t)$, escrevendo também as condições de fronteira homogéneas que devem ser impostas às funções espaciais $R(r)$ e $\Theta(\theta)$.

**Solução:** Procuram-se, por separação de variáveis, soluções da forma $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ as quais, substituindo na equação, levam a

$$R(r)\Theta(\theta)T'(t) = \alpha\left(R''(r)\Theta(\theta)T(t) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)T(t) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)T(t)\right).$$

Visto que procuramos soluções não identicamente nulas, dividimos toda a equação por $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ obtendo

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \alpha\left(\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right).$$

Tendo em conta que do lado esquerdo da igualdade temos apenas uma função de $t$ e do lado direito uma função de $(r,\theta)$ conclui-se que a igualdade só é possível se ambos forem iguais a uma mesma constante, que designaremos por $\lambda_1$,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda_1 = \alpha\left(\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right),$$

donde se pode desde já concluir que a função $T(t)$ tem de satisfazer a equação

$$T'(t) = \lambda_1 T(t).$$

Quanto às restantes funções $R(r)$ e $\Theta(\theta)$ temos

$$\alpha\left(\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right) = \lambda_1,$$

e separamos agora as variáveis $r$ e $\theta$ fazendo

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} = r^2\lambda_1 \Leftrightarrow r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} - r^2\lambda_1 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)},$$

e aqui voltamos a ter uma função apenas de $r$ do lado esquerdo da igualdade, enquanto do lado direito uma apenas de $\theta$, pelo que ambas terão de ser iguais a uma segunda constante, digamos $\lambda_2$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} - r^2\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)},$$

e daqui obtemos as duas restantes EDOs de segunda ordem, para $R(r)$ e $\Theta(\theta)$

$$r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} = r^2\lambda_1 + \lambda_2 \Leftrightarrow r^2R''(r) + rR'(r) - (r^2\lambda_1 + \lambda_2)R(r) = 0,$$

e

$$\Theta''(\theta) = -\lambda_2\Theta(\theta).$$

Faltam, finalmente, as condições de fronteira homogéneas, para $R(r)$ e $\Theta(\theta)$, observando que cada uma das correspondentes EDOs é de segunda ordem, pelo que são precisas duas condições para cada uma destas funções. Para $\Theta(\theta)$, que descreve a variação angular da função espacial, há que impor periodicidade em $\theta$. Pelo que as respetivas condições são

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \Leftrightarrow \Theta(0) - \Theta(2\pi) = 0 \quad \text{e} \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \Leftrightarrow \Theta'(0) - \Theta'(2\pi) = 0.$$

Para a função radial $R(r)$, impõe-se a condição de fronteira de Dirichlet nula em $r = 1$ sendo a segunda condição, a que garante a diferenciabilidade da solução na origem que, para uma função radial obriga, necessariamente a derivada a anular-se. Portanto

$$R'(0) = 0 \quad \text{e} \quad R(1) = 0.$$