

## Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2025/2026

3º TESTE - VERSÃO A

7 DE JANEIRO DE 2026

CURSOS: LMAC E LEFT

1. Considere a equação diferencial parcial

$$(t^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in ]0, \pi[, \quad t > 0,$$

com condições de fronteira

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \quad \text{para todo o } t > 0.$$

- [4,0 val] (a) Determine uma solução particular não homogénea da equação, que seja apenas função de  $x$ , e que satisfaça as condições de fronteira dadas.
- [6,0 val] (b) Use o método de separação de variáveis para, juntamente com o resultado obtido na alínea anterior, escrever a forma geral das soluções da EDP com as condições de fronteira dadas.

### Solução:

- (a) Seguindo a sugestão, procuramos uma solução particular não homogénea da forma  $u_p(x, t) = u_p(x)$ , que portanto satisfaz a equação

$$0 = u_p''(x) - u_p(x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow u_p''(x) - u_p(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Trata-se duma equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes, não homogénea, que resolvemos pelo método dos aniquiladores. A função  $-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$  é solução duma equação homogénea com operador diferencial  $(D - i1/2)(D + i1/2) = (D^2 + 1/4)$ , pelo que

$$u_p''(x) - u_p(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow (D - i1/2)(D + i1/2)(D^2 - 1)u_p(x) = 0.$$

A solução geral desta equação homogénea “aumentada” é

$$u_p(x) = Ae^x + Be^{-x} + C \sin\left(\frac{x}{2}\right) + D \cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

da qual os termos  $Ae^x + Be^{-x}$  correspondem à componente homogénea da equação original, com operador  $(D^2 - 1)$ , e portanto a componente particular não homogénea

é  $C \sin\left(\frac{x}{2}\right) + D \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  para constantes  $C$  e  $D$  que temos que agora determinar. Substituindo na equação original não homogénea temos então

$$\left(C \sin\left(\frac{x}{2}\right) + D \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)'' - \left(C \sin\left(\frac{x}{2}\right) + D \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right),$$

ou seja

$$\begin{aligned} -\frac{C}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{D}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right) - C \sin\left(\frac{x}{2}\right) + D \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \\ -\frac{5C}{4} \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{5D}{4} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

concluindo-se, portanto, que  $C = 4/5$  e  $D = 0$ . A função  $u_p(x) = \frac{4}{5} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  é assim uma solução particular não homogénea da EDO de segunda ordem, e portanto também uma solução particular não homogénea, apenas dependente de  $x$ , da EDP original. Observe-se, por fim, que ela satisfaz as condições de fronteira  $u(0, t) = 0$  e  $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$ , pelo que podemos descartar a componente homogénea  $Ae^x + Be^{-x}$ , que não será necessária para ajustar a solução particular não homogénea às condições de fronteira.

- (b) A solução do problema não homogéneo resulta da soma de uma solução particular não homogénea, obtida na alínea anterior, a todas as soluções do problema homogéneo

$$(t^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u,$$

com as mesmas condições de fronteira homogéneas,

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0,$$

que resolveremos agora pelo método de separação de variáveis, construindo uma solução por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , para  $0 < x < \pi$  e  $t > 0$ . Substituindo na equação diferencial parcial homogénea obtemos

$$(1 + t^2)X(x)T'(t) = X''(x)T(t) - X(x)T(t) \Leftrightarrow (1 + t^2) \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possível se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes  $x$  e  $t$ , forem ambas iguais a uma constante, digamos  $\lambda$ . Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde  $\lambda$  é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = \frac{(\lambda-1)}{1+t^2} T(t) \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogénea para  $T(t)$ , cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{(\lambda-1) \arctan t} \quad \text{com } A \in \mathbb{R}.$$

A expressão para as soluções da segunda equação depende do sinal de  $\lambda$ . Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B \cos \sqrt{-\lambda}x + C \sin \sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde  $B, C$  são constantes reais.

As condições de fronteira homogêneas  $u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$  para as soluções da forma  $X(x)T(t)$  não nulas implicam que

$$X(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções  $X(x)$  determinadas acima temos

(i) Para  $\lambda > 0$ :

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ \sqrt{\lambda}B e^{\sqrt{\lambda}\pi} - \sqrt{\lambda}C e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para  $\lambda = 0$ :

$$\begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

(iii) Para  $\lambda < 0$ :

$$\begin{cases} B = 0 \\ C\sqrt{-\lambda} \cos \sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

donde obtemos os valores próprios  $\lambda_n = -(n + \frac{1}{2})^2$  negativos, com  $n = 0, 1, 2, \dots$ , e as correspondentes funções próprias não nulas  $X_n(x) = C \operatorname{sen}((n + \frac{1}{2})x)$ .

As soluções não triviais da equação diferencial da forma  $X(x)T(t)$  que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A \operatorname{sen} \left( \frac{2n+1}{2} x \right) e^{-((\frac{2n+1}{2})^2 + 1) \arctan t}$$

com  $A \in \mathbb{R}$  e  $n = 0, 1, 2, \dots$

Portanto, para concluir, a solução geral do problema não homogêneo resulta da soma da solução particular não homogênea determinada na alínea anterior, à "combinação linear infinita" das soluções homogêneas obtidas agora por separação de variáveis

$$u(x, t) = \frac{4}{5} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{2n+1}{2} x \right) e^{-((\frac{2n+1}{2})^2 + 1) \arctan t}.$$

2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

[5,0 val]

(a) Determine a matriz  $e^{At}$ .

[5,0 val]

(b) Resolva o problema de valor inicial  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ ,  $\mathbf{y}(0) = (0, 0, 1, 2)$ , com  $\mathbf{b}(t) = (0, 3e^{6t}, 0, 0)$ .

**Solução:**

(a) A matriz  $A$  pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

onde, chamando  $J$  à matriz,

$$J = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

se tem evidentemente uma forma canónica de Jordan (com a convenção da sub-diagonal de 1 estar por baixo da diagonal principal, em vez de por cima... mas é totalmente equivalente).

Portanto,

$$e^{At} = e^{-2Jt} = e^{J(-2t)} = e^{J\tilde{t}},$$

em que faremos  $\tilde{t} = -2t$ . Escrevemos então a exponencial da forma canónica  $J$  para a variável  $\tilde{t}$  a qual, no final, substituiremos por  $-2t$ . Assim

$$e^{J\tilde{t}} = e^{-3\tilde{t}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{t} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{t}^2}{2} & \tilde{t} & 1 & 0 \\ \frac{\tilde{t}^3}{6} & \frac{\tilde{t}^2}{2} & \tilde{t} & 1 \end{bmatrix},$$

donde, por fim,

$$e^{At} = e^{J(-2t)} = e^{6t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2t & 1 & 0 & 0 \\ 2t^2 & -2t & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3}t^3 & 2t^2 & -2t & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativamente, a resolução desta alínea também podia ser feita (como na prova da exponencial dum bloco de Jordan) decompondo a matriz  $A$  na forma

$$A = 6I + N,$$

onde

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

é uma matriz nilpotente. De facto, verifica-se que

$$N^4 = 0.$$

Consequentemente, a série exponencial de  $e^{Nt}$  é finita:

$$e^{Nt} = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \frac{t^3}{6}N^3.$$

Calculando as potências de  $N$ , obtém-se

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2t & 1 & 0 & 0 \\ 2t^2 & -2t & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3}t^3 & 2t^2 & -2t & 1 \end{bmatrix}.$$

Como  $A = 6I + N$  e  $I$  comuta com  $N$ , tem-se

$$e^{At} = e^{6t}e^{Nt}.$$

Conclui-se desta forma também que

$$e^{At} = e^{6t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2t & 1 & 0 & 0 \\ 2t^2 & -2t & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3}t^3 & 2t^2 & -2t & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) A solução deste sistema linear não homogéneo é dada pela fórmula de variação das constantes:

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As}\mathbf{b}(s) ds.$$

A resolução consiste simplesmente em substituir a exponencial determinada na alínea anterior e efectuar os cálculos.

Para a parte homogéna da solução tem-se

$$e^{At}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{6t} \\ (2 - 2t)e^{6t} \end{bmatrix}.$$

Para a parte da solução particular não homogéna começamos por calcular

$$e^{-As}\mathbf{b}(s) = e^{-6s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2s & 1 & 0 & 0 \\ 2s^2 & 2s & 1 & 0 \\ \frac{4}{3}s^3 & 2s^2 & 2s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{6s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6s \\ 6s^2 \end{bmatrix}$$

pelo que integrando agora termo a termo

$$\int_0^t e^{-As}\mathbf{b}(s) ds = \begin{bmatrix} 0 \\ 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{bmatrix},$$

a qual, multiplicando por  $e^{At}$ , dá

$$e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds = e^{At} \begin{bmatrix} 0 \\ 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3te^{6t} \\ -3t^2e^{6t} \\ 2t^3e^{6t} \end{bmatrix}.$$

A solução completa obtém-se, finalmente, somando as duas componentes,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3te^{6t} \\ (1 - 3t^2)e^{6t} \\ (2 - 2t + 2t^3)e^{6t} \end{bmatrix}.$$