DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

3º Teste - Versão A

4 de Janeiro de 2024

Cursos: LMAC e LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: 45 minutos.

[2,0 val] 1. (a) Seja $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $y(t) = e^{3t}v(t)$, com v de classe $C^2(I)$. Mostre que

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3t}v''(t).$$

[5,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3t}}{t^3}, \qquad y(1) = 0,\ y'(1) = 0.$$

2. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e coeficientes constantes

$$\begin{cases} x' = y + e^{-t} \\ y' = -x - 2y - e^{-t} \\ z' = 2x - z + 2te^{-t} \end{cases}$$

[4,0 val] (a) Verifique que a exponencial matricial associada à parte homogénea do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} & 0 \\ (t^2+2t)e^{-t} & t^2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

[4,0 val] (b) Determine uma solução particular do sistema não homogéneo.

[5,0 val] 3. Considere a equação do calor em duas dimensões espaciais, num disco de raio unitário $x^2 + y^2 \leq 1$, com condições de fronteira de Dirichlet homogéneas, escrita em coordenadas polares para $u(r, \theta, t)$ como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \\ \\ u(1, \theta, t) = 0, \quad \text{em } r = 1. \end{cases}$$

Usando o método de separação de variáveis, ou seja, assumindo soluções da forma $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, escreva as equações diferenciais ordinárias resultantes para $R(r)$, $\Theta(\theta)$, e $T(t)$, escrevendo também as condições de fronteira homogéneas que devem ser impostas às funções espaciais $R(r)$ e $\Theta(\theta)$.