DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

2º Teste - Versão B

30 de Novembro de 2023

Cursos: LMAC e LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: 45 minutos.

[6,0 val] 1. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y \operatorname{sen} t}{\cos t} + g(t), \qquad y(0) = 2,$$

em que a função $g : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)}{\cos t} & \text{se} \quad t < 1, \\ \\ 0 \quad \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

2. Seja $\alpha(x)$ uma função real diferenciável e considere a equação diferencial ordinária

$$2\alpha(x)y + (x\alpha(x) - 2y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

[3,0 val] (a) Determine a forma geral de $\alpha(x)$ para que a equação seja exata.

[4,0 val] (b) Para $\alpha(x) = x$ determine a solução do problema de valor inicial $y(-2) = 2 - \sqrt{3}$ e indique o seu intervalo máximo de definição.

3. Considere o problema de Cauchy

$$y' = \frac{3 + \cos y}{t^2 + y^2} \qquad y(1) = 1.$$

[2,0 val] (a) Determine as duas primeiras iterações de Picard, $y_0(t)$ e $y_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

[2,0 val] (b) Justifique a existência e unicidade local de solução deste problema de valor inicial.

[3,0 val] (c) Usando um argumento de comparação, prove que a solução está definida para todo o $t \in [1, +\infty[$.