DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral - III

## 1º Semestre 2023/2024

2º Teste - Versão A

30 de Novembro de 2023

Cursos: LMAC e LEFT

## INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: 45 minutos.

1. Seja $\beta(x)$ uma função real diferenciável e considere a equação diferencial ordinária

$$2y\beta(x) + (2y + x\beta(x))\frac{dy}{dx} = 0.$$

[3,0 val] (a) Determine a forma geral de $\beta(x)$ para que a equação seja exata.

[4,0 val] (b) Para $\beta(x) = -x$ determine a solução do problema de valor inicial $y(2) = 2 + \sqrt{3}$ e indique o seu intervalo máximo de definição.

[6,0 val] 2. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y \sin t}{\cos t} + h(t), \qquad y(0) = 1,$$

em que a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h(t) = \begin{cases} (1-t)\cos t & \text{se} \quad t < 1, \\ 0 \quad \text{se} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

3. Considere o problema de Cauchy

$$y' = \frac{5 - \operatorname{sen} y}{t^2 + y^4} \qquad y(1) = 1.$$

[2,0 val] (a) Determine as duas primeiras iterações de Picard, $y_0(t)$ e $y_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

[2,0 val] (b) Justifique a existência e unicidade local de solução deste problema de valor inicial.

[3,0 val] (c) Usando um argumento de comparação, prove que a solução está definida para todo o $t \in [1, +\infty[$.