

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

1º TESTE - VERSÃO B

19 DE OUTUBRO DE 2023

CURSOS: LMAC E LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
 - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
 - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
 - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
 - Classificação de 0 a 20.
 - Duração: 45 minutos.
-
-

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = z^2 + 1, \quad -1 < z < 1, \quad -2 < y < 2\}.$$

[4,0 val] (a) Prove que S é uma variedade, indique a sua dimensão e determine uma base do seu espaço tangente no ponto $(1, 0, 0)$.

[4,0 val] (b) Calcule o valor do integral $\iint_S f$ sobre S em que f é o campo escalar dado por

$$f(x, y, z) = \frac{|x|y^2z^2}{\sqrt{1 + 2z^2}}.$$

2. Considere o campo vetorial, definido em \mathbb{R}^3 ,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2z, 2z, x).$$

[4,0 val] (a) Justifique que \mathbf{F} admite um potencial vetorial e determine um exemplo com a terceira componente nula.

[5,0 val] (b) Utilizando o teorema de Stokes, determine o fluxo de \mathbf{F} através da superfície

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad x < 4, \quad y < 4\},$$

escolhendo o sentido da normal unitária que em $(0, 0, 5)$ é $(0, 0, 1)$.

[3,0 val] 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, nas condições do teorema da divergência. Sejam $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo escalar, e $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial que admite um potencial vetorial \mathbf{G} (ou seja, tal que $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$). Assuma ainda que f se anula na fronteira de Ω , isto é, que nos pontos de $\partial\Omega$ se tem $f = 0$. Prove que, nessas condições, se tem

$$\iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{F} \, dV = 0.$$