DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

# Cálculo Diferencial e Integral - III

## 1º Semestre 2023/2024

1º Teste - Versão A

19 de Outubro de 2023

Cursos: LMAC e LEFT

## INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: 45 minutos.

1. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x^2 + 1, \quad -2 < z < 2, \quad -1 < x < 1\}.$$

[4,0 val] (a) Prove que $S$ é uma variedade, indique a sua dimensão e determine uma base do seu espaço tangente no ponto $(0,1,0)$.

[4,0 val] (b) Calcule o valor do integral $\iint_S f$ sobre $S$ em que $f$ é o campo escalar dado por

$$f(x,y,z) = \frac{|y|x^2z^2}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

2. Considere o campo vetorial, definido em $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z, -2x, 2x).$$

[4,0 val] (a) Justifique que $\mathbf{F}$ admite um potencial vetorial e determine um exemplo com a primeira componente nula.

[5,0 val] (b) <u>Utilizando o teorema de Stokes</u>, determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da superfície

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad z < 4, \quad y < 4\},$$

escolhendo o sentido da normal unitária que em $(5,0,0)$ é $(1,0,0)$.

[3,0 val] 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado, nas condições do teorema da divergência. Sejam $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo escalar, e $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ um campo vetorial que admite um potencial vetorial $\mathbf{G}$ (ou seja, tal que $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$). Assuma ainda que $f$ se anula na fronteira de $\Omega$, isto é, que nos pontos de $\partial\Omega$ se tem $f = 0$. Prove que, nessas condições, se tem

$$\iiint_\Omega \nabla f \cdot \mathbf{F}\, dV = 0.$$