

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2025/2026

EXAME/TESTE DE RECUPERAÇÃO - VERSÃO B

21 DE JANEIRO DE 2026

CURSOS: LMAC E LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
 - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
 - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
 - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
 - Classificação de 0 a 20.
 - Duração: Exame - 2 horas e 15 minutos. Testes - 45 minutos.
-
-

TESTE 1

1. Seja M a superfície definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = xz, z > 0, x < 1, z < x\}$ e seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, yz, yz).$$

- [5,0 val] (a) Usando o teorema de Stokes calcule o fluxo do rotacional de \mathbf{F} através de M

$$\int_M \text{rot } \mathbf{F} \cdot \nu \, dS,$$

escolhendo a orientação da normal unitária ν com segunda componente positiva.

- [5,0 val] (b) Confirme o resultado da alínea anterior calculando o fluxo do rotacional de \mathbf{F} diretamente pela definição.

- [7,0 val] 2. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (-x, y, z).$$

através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + (z - 3)^2 = 1, z < 3\},$$

com a normal unitária orientada com a terceira componente negativa.

- [3,0 val] 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$ regular, nas condições do teorema da divergência, e sejam $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ funções escalares que satisfazem condições de Neumann iguais na fronteira de Ω , isto é, tais que as derivadas direccionais $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ e $\frac{\partial v}{\partial \nu}$, na direção ν normal a $\partial\Omega$, são iguais. Prove que, então, tem-se

$$\int_{\Omega} \Delta(u - v) \, dV = 0.$$

TESTE 2

- [7,0 val] 1. Efetuando a mudança de variável $v = y^5$, determine explicitamente a solução do problema de valor inicial

$$y' = \frac{y^{10} - 1}{10y^4t}, \quad y(2) = \sqrt[5]{2},$$

e indique o seu intervalo máximo de definição.

2. Considere a equação diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(4y - y^2) \log(y + 1)}{y - 3}.$$

- [2,0 val] (a) Determine os pontos de equilíbrio.
[3,0 val] (b) Esboce o campo de direções e trace os diferentes tipos de gráficos das soluções.
[2,0 val] (c) Indique, justificando, qual o tipo de estabilidade dos pontos de equilíbrio.

3. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -4\sqrt[3]{ty^2}, \quad y(t_0) = y_0.$$

- [3,0 val] (a) Estude a existência e unicidade no caso em que $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$.
[3,0 val] (b) Determine, justificando, para que valores de t_0 e y_0 consegue garantir existência e unicidade globais.

TESTE 3

1. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}.$$

- [3,0 val] (a) Determine a correspondente solução matricial principal em $t = 0$.
- [3,0 val] (b) Obtenha a solução do problema de valor inicial com condições iniciais $(x(1), y(1)) = (3, -2)$.

[4,0 val] 2. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de cossenos de $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{se } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

e indique, justificando, a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

- [3,0 val] (b) Use a série trigonométrica da alínea anterior para, num ponto x adequado, determinar o valor da soma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

[3,0 val] 3. (a) Determine a solução geral da equação homogénea

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right) y' + \frac{1}{t} y = 0$$

procurando soluções da forma $y(t) = at + b$ e $y(t) = e^{\lambda t}$, para constantes a, b e λ adequadas.

[4,0 val] (b) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right) y' + \frac{1}{t} y = -te^t, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = e.$$