DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

EXAME/TESTE DE RECUPERAÇÃO - VERSÃO B

17 DE JANEIRO DE 2024

CURSOS: LMAC E LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: Exame - 2 horas e 15 minutos. Testes - 45 minutos.

TESTE 1

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 : x^2 + y^2 = 9, \quad z^2 + u^2 = 1, \quad -3 < w < 3\}.$$

[2,0 val] (a) Prove que M é uma variedade e indique a sua dimensão d.

[2,0 val] (b) Indique uma parametrização para M.

[4,0 val] (c) Determine o correspondente elemento de volume d-dimensional e calcule o valor do integral $\int_M f$ sobre M em que f é o campo escalar dado por

$$f(x, y, z, w, u) = |z|w^2.$$

2. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y^2 + 2z^2 = 8, \quad 0 < x < 6\}.$$

[6,0 val] (a) Use o teorema da divergência de forma conveniente para calcular o fluxo do campo vetorial

$$F(x, y, z) = (x, y \operatorname{sen} z, \cos z),$$

através de S, na direção da normal com a primeira componente positiva.

[6,0 val] (b) Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de

$$G(x, y, z) = ((xyz)^{1000}, -(x + 1)z, (x + 1)y),$$

através de S, na direção da normal com a primeira componente negativa.

TESTE 2

1. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = \frac{3t - y}{y + t}.$$

[2,0 val] (a) Determine todas as soluções da forma $y(t) = mt$, com $m \in \mathbb{R}$.

[4,0 val] (b) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções. (Sugestão: Comece por procurar pontos do domínio da equação em que as derivadas das soluções têm valores determinados, e use também o resultado da alínea anterior.)

[2,0 val] (c) Faça a mudança de variável $v = y/t$ e verifique que transforma a equação dada numa equação separável.

[5,0 val] (d) Resolva explicitamente o problema de valor inicial $y(1) = 0$ e indique o seu intervalo máximo de definição.

[4,0 val] 2. Determine para que valores da condição inicial $y(1) = y_0 \in \mathbb{R}$ é que a correspondente solução da equação

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t\cos t + \operatorname{sen} t - y}{t},$$

tem limite $\lim_{t \to 0^+} y(t)$ finito e indique qual o valor do limite, nesses casos.

[3,0 val] 3. Considere uma equação diferencial ordinária, de primeira ordem, autónoma

$$y' = f(y),$$

com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Suponha que a equação tem apenas dois pontos de equilíbrio, $f(a) = f(b) = 0$, com $a < b$. Prove que, qualquer que seja a condição inicial $y(t_0) = y_0$, com $t_0 \in \mathbb{R}$ e $a \leq y_0 \leq b$, existe solução, é única, e o seu intervalo máximo de definição é $t \in]-\infty, +\infty[$.

TESTE 3

[7,0 val] 1. Use o método de separação de variáveis para determinar a forma geral das soluções do seguinte problema de valor de fronteira,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = e^t \, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{3u}{t^2+1} & 0 < x < 1 \, , \; t > 0 \\[2ex] u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) & t > 0, \\[2ex] u(1,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) & t > 0. \end{cases}$$

[6,0 val] 2. Sabendo que e^{-2t} é solução da correspondente equação homogénea, determine a solução geral de

$$y''' + 6y'' + 13y' + 10y + 6 = -13t - 5t^2 + e^{-2t}.$$

[7,0 val] 3. Determine a solução do problema de valor inicial para o sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + z \\ y' = 3y + 2e^{t^2} w - 3 \\ z' = 3z + w + 2e^{3t} \\ w' = 3w + e^{3t}, \end{cases} \qquad x(0) = 0, \; y(0) = 1, \; z(0) = 0, \; w(0) = 0.$$