DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2025/2026

Exame/Teste de Recuperação - Versão A

21 de Janeiro de 2026

Cursos: LMAC e LEFT

INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Classificação de 0 a 20.
- Duração: Exame - 2 horas e 15 minutos. Testes - 45 minutos.

TESTE 1

[7,0 val] 1. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (x, y, -z).$$

através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + (z - 2)^2 = 1,\ z > 2\},$$

com a normal unitária orientada com a terceira componente positiva.

2. Seja M a superfície definida por $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = yz,\ z > 0,\ y < 1,\ z < y\}$ e seja $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vetorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, y, xz).$$

[5,0 val] (a) Usando o teorema de Stokes calcule o fluxo do rotacional de $\mathbf{F}$ através de M

$$\int_M \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS,$$

escolhendo a orientação da normal unitária ν com primeira componente positiva.

[5,0 val] (b) Confirme o resultado da alínea anterior calculando o fluxo do rotacional de $\mathbf{F}$ diretamente pela definição.

[3,0 val] 3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, com fronteira $\partial\Omega$ regular, nas condições do teorema da divergência, e sejam $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ funções escalares que satisfazem condições de Neumann iguais na fronteira de Ω, isto é, tais que as derivadas direccionais $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ e $\frac{\partial v}{\partial \nu}$, na direção ν normal a $\partial\Omega$, são iguais. Prove que, então, tem-se

$$\int_\Omega \Delta(u - v) dV = 0.$$

TESTE 2

1. Considere a equação diferencial autónoma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2+3y)\log(1-y)}{y+2}.$$

[2,0 val] (a) Determine os pontos de equilíbrio.

[3,0 val] (b) Esboce o campo de direções e trace os diferentes tipos de gráficos das soluções.

[2,0 val] (c) Indique, justificando, qual o tipo de estabilidade dos pontos de equlíbrio.

[7,0 val] 2. Efetuando a mudança de variável $v = y^3$, determine explicitamente a solução do problema de valor inicial

$$y' = \frac{y^6 - 1}{6y^2 t}, \quad y(1) = \sqrt[3]{2},$$

e indique o seu intervalo máximo de definição.

3. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -6\sqrt[5]{ty^4}, \quad y(t_0) = y_0.$$

[3,0 val] (a) Estude a existência e unicidade no caso em que $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$.

[3,0 val] (b) Determine, justificando, para que valores de t_0 e y_0 consegue garantir existência e unicidade globais.

TESTE 3

[3,0 val] 1. (a) Determine a solução geral da equação homogénea

$$y'' - \frac{t+1}{t}y' + \frac{1}{t}y = 0$$

procurando soluções da forma $y(t) = at + b$ e $y(t) = e^{\lambda t}$, para constantes a, b e λ adequadas.

[4,0 val] (b) Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$y'' - \frac{t+1}{t}y' + \frac{1}{t}y = 2te^t, \qquad y(1) = e, \quad y'(1) = 0.$$

2. Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}.$$

[3,0 val] (a) Determine a correspondente solução matricial principal em $t = 0$.

[3,0 val] (b) Obtenha a solução do problema de valor inicial com condições iniciais $(x(1), y(1)) = (2, -3)$.

[4,0 val] 3. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de cosenos da função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - 2x & \text{se} \quad \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

e indique, justificando, a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[3,0 val] (b) Use a série trigonométrica da alínea anterior para, num ponto x adequado, determinar o valor da soma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^2}.$$