

# Cálculo Diferencial e Integral - III

1º Semestre 2023/2024

EXAME/TESTE DE RECUPERAÇÃO - VERSÃO A

17 DE JANEIRO DE 2024

CURSOS: LMAC E LEFT

---

---

## INSTRUÇÕES

- As respostas devem ser escritas a caneta. Testes a lápis não permitem revisão de prova.
  - Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos electrónicos, incluindo máquinas de calcular
  - A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
  - Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
  - Classificação de 0 a 20.
  - Duração: Exame - 2 horas e 15 minutos. Testes - 45 minutos.
- 
-

## TESTE 1

1. Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + y + 3z^2 = 12, \quad 0 < y < 9\}.$$

[6,0 val] (a) Use o teorema da divergência de forma conveniente para calcular o fluxo do campo vetorial

$$F(x, y, z) = (x \operatorname{sen} z, y, \cos z),$$

através de  $S$ , na direção da normal com a segunda componente negativa.

[6,0 val] (b) Use o teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional de

$$G(x, y, z) = ((y + 1)z, (xyz)^{999}, -(y + 1)x),$$

através de  $S$ , na direção da normal com a segunda componente positiva.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 : x^2 + z^2 = 4, \quad w^2 + u^2 = 9, \quad -2 < y < 2\}.$$

[2,0 val] (a) Prove que  $M$  é uma variedade e indique a sua dimensão  $d$ .

[2,0 val] (b) Indique uma parametrização para  $M$ .

[4,0 val] (c) Determine o correspondente elemento de volume  $d$ -dimensional e calcule o valor do integral  $\int_M f$  sobre  $M$  em que  $f$  é o campo escalar dado por

$$f(x, y, z, w, u) = y^2|w|.$$

## TESTE 2

- [4,0 val] 1. Determine para que valores da condição inicial  $y(1) = y_0 \in \mathbb{R}$  é que a correspondente solução da equação

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos t - t \operatorname{sen} t - y}{t},$$

tem limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$  finito e indique qual o valor do limite, nesses casos.

2. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = \frac{y + 8t}{y - t}.$$

- [2,0 val] (a) Determine todas as soluções da forma  $y(t) = mt$ , com  $m \in \mathbb{R}$ .
- [4,0 val] (b) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções. (Sugestão: Comece por procurar pontos do domínio da equação em que as derivadas das soluções têm valores determinados, e use também o resultado da alínea anterior.)
- [2,0 val] (c) Faça a mudança de variável  $v = y/t$  e verifique que transforma a equação dada numa equação separável.
- [5,0 val] (d) Resolva explicitamente o problema de valor inicial  $y(-1) = 0$  e indique o seu intervalo máximo de definição.

- [3,0 val] 3. Considere uma equação diferencial ordinária, de primeira ordem, autónoma

$$y' = f(y),$$

com  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Suponha que a equação tem apenas dois pontos de equilíbrio,  $f(a) = f(b) = 0$ , com  $a < b$ . Prove que, qualquer que seja a condição inicial  $y(t_0) = y_0$ , com  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $a \leq y_0 \leq b$ , existe solução, é única, e o seu intervalo máximo de definição é  $t \in ] - \infty, +\infty[$ .

### TESTE 3

- [6,0 val] 1. Sabendo que  $e^{2t}$  é solução da correspondente equação homogénea, determine a solução geral de

$$y''' - 6y'' + 13y' - 10y + 6 = 13t - 5t^2 + e^{2t}.$$

- [7,0 val] 2. Determine a solução do problema de valor inicial para o sistema

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 3y + w + 2e^{3t} \\ z' = 3z + 2e^{t^2}w - 3 \\ w' = 3w + e^{3t}, \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1, w(0) = 0.$$

- [7,0 val] 3. Use o método de separação de variáveis para determinar a forma geral das soluções do seguinte problema de valor de fronteira,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (t+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{5u}{t^2+1} & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) & t > 0, \\ u(1, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) & t > 0. \end{cases}$$