

FORMAS DIFERENCIAIS E O TEOREMA DE STOKES

1. INTRODUÇÃO

O objectivo destas aulas é explicar o enunciado do Teorema de Stokes (ou teorema fundamental do cálculo para integrais em variedades) e demonstrá-lo. Este Teorema afirma o seguinte:

$$(1) \quad \int_{M^+} d\omega = \int_{\partial M^+} \omega.$$

Na fórmula anterior M é uma variedade de dimensão k (com $1 \leq k \leq n$) em $\mathbb{R}^n$ compacta com bordo ∂M . O bordo de uma variedade- k é uma variedade de dimensão $(k-1)$ que pode ser vista como uma espécie de "fronteira intrínseca"¹. Por exemplo se $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ é o hemisfério superior de uma superfície esférica, $\partial M = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ é o equador.

Na fórmula (5.2.1), $+$ designa uma *orientação* de M e também a respectiva orientação induzida no bordo ∂M , ω é uma *forma diferencial* de grau $(k-1)$ (veremos que são estes os objectos que faz sentido integrar numa variedade- $(k-1)$) e $d\omega$ designa a sua *derivada exterior*, que é uma forma diferencial de grau k .

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, o Teorema admite formulações mais elementares em termos de integrais de campos vectoriais em linhas e superfícies. Estas formulações particulares chamam-se os Teoremas de Green, da Divergência e de Stokes² (este último trata o caso em que M é uma superfície em $\mathbb{R}^3$).

Note-se também que, como acontece em qualquer versão do Teorema Fundamental do Cálculo, a fórmula (5.2.1) relaciona o integral da derivada de algo com a soma (ou integral) desse algo sobre a "fronteira" do domínio de integração da derivada - compare-se com a fórmula

$$\int_{[a,b]} f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Veremos na realidade que a fórmula (5.2.1) se deduz a partir da fórmula anterior e que por sua vez, esta última é um caso particular de (5.2.1).

2. COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Recorde-se que um espaço vectorial real é um conjunto V munido de duas operações: multiplicação por escalar $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ notada $(\alpha, v) \mapsto \alpha v$ e soma $V \times V \xrightarrow{+} V$ que se escreve $(v, w) \mapsto v + w$, satisfazendo certos axiomas (comutatividade da soma, distributividade em relação à multiplicação por escalar, etc.)

Escrevemos $L(V, W)$ para o conjunto das transformações lineares $V \rightarrow W$. É imediato verificar que definindo a soma de duas transformações lineares f e g por

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v)$$

e a multiplicação por escalar por

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$$

obtemos em $L(V, W)$ uma estrutura de espaço vectorial.

¹Só é a fronteira quando a dimensão da variedade é n uma vez que a fronteira de uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $k < n$ coincide com o seu fecho.

²A fórmula (5.2.1) é por vezes chamada o Teorema de Stokes generalizado.

2.1. O dual de um espaço vectorial.

Definição 2.1.1. O dual de um espaço vectorial V é o espaço vectorial $V^* = L(V, \mathbb{R})$. Os elementos de V^* chamam-se funcionais lineares em V .

Se $f \in V^*$, temos $f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n)$ para quaisquer $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in V$ logo um funcional linear é completamente determinado pelos valores que assume numa base de V .

Exemplo 2.1.2. Exemplos de funcionais lineares.

- (i) Um elemento de $(\mathbb{R}^n)^*$ é uma função da forma $(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, com $a_i \in \mathbb{R}$.
- (ii) Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$, então a derivada $Df(x)$ é um elemento do dual de $\mathbb{R}^n$.
- (iii) Se V é o espaço vectorial das funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, a aplicação $V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

é um elemento de V^* . Para obter um exemplo com V de dimensão finita podemos restringir o funcional a um subespaço de dimensão finita de V , por exemplo, o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a um número fixo N .

Definição 2.1.3. Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . A base dual de V^* é $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ onde φ^i designa o funcional linear determinado pela fórmula:

$$\varphi^i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

A terminologia da definição anterior é justificada pela proposição seguinte.

Proposição 2.1.4. Dada uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , os elementos $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ da Definição 2.1.3 formam uma base de V^* .

Demonstração. Dado $f \in V^*$, o funcional

$$f(v_1)\varphi^1 + \dots + f(v_n)\varphi^n$$

toma os mesmos valores que f na base $\{v_1, \dots, v_n\}$ e portanto coincide com f . Isto mostra que o conjunto $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ gera V^* .

Para ver que o conjunto é linearmente independente suponhamos que $\alpha_i \in \mathbb{R}$ são escalares tais que $\alpha_1 \varphi^1 + \dots + \alpha_n \varphi^n = 0$. Avaliando este funcional no elemento v_i obtemos

$$0 = \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_{i-1} \cdot 0 + \alpha_i \cdot 1 + \alpha_{i+1} \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_i$$

e portanto $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ é um conjunto linearmente independente. $\square$

Note-se que a demonstração anterior inclui um procedimento para exprimir qualquer funcional em termos de uma base dual: o coeficiente de f segundo φ^i é $f(v_i)$.

Tem particular importância a base dual da base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\{e^1, \dots, e^n\}$. Por definição temos

$$e^i((x_1, \dots, x_n)) = x_i$$

e, portanto a base dual da base canónica de $\mathbb{R}^n$ é constituída pelas funções coordenadas. Isto é, as coordenadas cartesianas são a base dual da base canónica de $\mathbb{R}^n$!

Com esta notação, se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável temos que

$$(2) \quad Df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)e^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)e^n.$$

A função que associa a cada x este elemento do dual de $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de uma forma diferencial de grau 1, como veremos em breve.

2.2. Tensores covariantes.

Definição 2.2.1. Sejam $V_1, \dots, V_n$ e W espaços vectoriais. Uma aplicação

$$f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

diz-se multilinear se

$$f(v_1, \dots, \alpha v_i + \beta w_i, \dots, v_n) = \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \beta f(v_1, \dots, w_i, \dots, v_n)$$

para todos os $v_j, w_j \in V_j$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Isto é, se é linear em cada variável quando as restantes são fixadas. O conjunto das aplicações multilineares é designado por $L(V_1, \dots, V_n; W)$.

Se $V_1 = \dots = V_n = V$ e $W = \mathbb{R}$, escrevemos $\mathcal{T}^k(V)$ em vez de $L(V, \dots, V; \mathbb{R})$. Os elementos de $\mathcal{T}^k(V)$ chamam-se tensores- k em V (covariantes).

Note-se que $L(V_1; W)$ é o que antes chamámos $L(V_1, W)$ e que $\mathcal{T}^1(V) = V^*$.

É imediato verificar que $L(V_1, \dots, V_n; W)$ é um espaço vectorial com as operações definidas analogamente ao que foi feito para $L(V, W)$:

$$(f + g)(v_1, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_n) + g(v_1, \dots, v_n)$$

e

$$(\alpha f)(v_1, \dots, v_n) = \alpha f(v_1, \dots, v_n).$$

Alguns exemplos de tensores devem já ser familiares.

Exemplo 2.2.2. Exemplos de tensores.

- (i) Um produto interno em V , $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é um elemento de $\mathcal{T}^2(V)$.
- (ii) Sendo v_i vectores de $\mathbb{R}^n$ e denotando por $[v_1 \dots v_n]$ a matriz que tem por colunas os vectores v_i , a aplicação $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det[v_1 \dots v_n]$ é um elemento de $\mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$.

Um exemplo de uma aplicação multilinear com valores em $\mathbb{R}^m$ é dado pela derivada de ordem- k de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Este exemplo é desenvolvido nos exercícios desta secção (ver o Exercício 2.4.6).

Há uma maneira natural de "multiplicar" um tensor- k e um tensor- l de forma a obter um tensor- $(k+l)$ que agora definimos.

Definição 2.2.3. Seja V um espaço vectorial, $\varphi \in \mathcal{T}^k(V)$ e $\psi \in \mathcal{T}^l(V)$. O produto tensorial de φ e ψ é o elemento $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ definido pela expressão

$$(\varphi \otimes \psi)(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) = \varphi(v_1, \dots, v_k) \psi(w_1, \dots, w_l).$$

Proposição 2.2.4. Propriedades do produto tensorial.

- (1) (Bilinearidade). A aplicação $\mathcal{T}^k(V) \times \mathcal{T}^l(V) \rightarrow \mathcal{T}^{k+l}(V)$ definida pelo produto tensorial é bilinear.
- (2) (Associatividade). Dados $\phi \in \mathcal{T}^k(V)$, $\psi \in \mathcal{T}^l(V)$ e $\chi \in \mathcal{T}^m(V)$, tem-se

$$(\phi \otimes \psi) \otimes \chi = \phi \otimes (\psi \otimes \chi).$$

Demonstração. Exercício. □

A demonstração da seguinte proposição é muito semelhante à da Proposição 2.1.4 e fica como exercício.

Proposição 2.2.5. Se $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$ é uma base de V^* , uma base para $\mathcal{T}^k(V)$ é dada por

$$\{\varphi^{i_1} \otimes \varphi^{i_2} \otimes \dots \otimes \varphi^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}.$$

Em particular, $\dim \mathcal{T}^k(V) = \dim(V)^k$.

Note-se que não há ambiguidade na descrição da base acima devido à associatividade do produto tensorial. Para fixar ideias é bom vermos um exemplo simples.

Exemplo 2.2.6. A proposição acima implica que $\{\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2\}$ é uma base para $\mathcal{T}^2(\mathbb{R}^2)$, onde, por exemplo, $\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1$ é a função $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$(\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1)(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_2 y_1.$$

2.3. Tensores alternantes. Estamos particularmente interessados em certos tipos de tensores para os quais o determinante considerado acima no Exemplo 2.2.2 é o protótipo.

Definição 2.3.1. Um tensor $\varphi \in \mathcal{T}^k(V)$ diz-se alternante se³

$$\varphi(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\varphi(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n).$$

O conjunto dos tensores- k alternantes é denotado por $\Lambda^k(V)$.

É imediato verificar que os tensores alternantes formam um subespaço linear de $\mathcal{T}^k(V)$. É também claro que o determinante (ver Exemplo 2.2.2) é um elemento de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.2. Uma permutação do conjunto $X_n = \{1, \dots, n\}$ (com n um natural) é uma bijecção de X_n em si mesmo. O conjunto das permutações é denotado por Σ_n .

No conjunto Σ_n está definida uma operação - a composição de aplicações - que é associativa, tem elemento neutro - a identidade - e inversos - o inverso de uma permutação é a função inversa. Uma tal estrutura algébrica chama-se um *grupo* e por isso referimo-nos a Σ_n como o *grupo das permutações*.

Os elementos mais simples de Σ_n (depois da identidade) são as *transposições* que se limitam a trocar dois elementos. Pode provar-se que qualquer permutação se pode escrever como um produto de transposições e que na realidade a *paridade* do número de transposições numa factorização de $\sigma \in \Sigma_n$ está bem definido (ver o Exercício 2.4.8). Se

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$$

com τ_i transposições, define-se o *signal* de σ por

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m.$$

Note-se a seguinte consequência imediata desta definição

$$\text{sgn}(\sigma\mu) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\mu).$$

É usual usar a seguinte notação para uma permutação:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

designa a permutação tal que $\sigma(j) = i_j$.

Exemplo 2.3.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{portanto } \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

É uma consequência da definição de sinal de uma permutação que o sinal de σ coincide com o determinante da matriz de permutação representando a transformação linear que envia o i -ésimo vector da base canónica no $\sigma(i)$ -ésimo. Esta não é no entanto uma boa alternativa para a definição de sinal uma vez que a definição de determinante usa o conceito de sinal de uma permutação...

³Convenciona-se que a condição seguinte é vazia quando $k = 1$, isto é que todos os elementos do dual são alternantes.

É claro da Definição 2.3.1 e da definição de sinal de uma permutação que $\varphi \in \Lambda^k(V)$ sse, para todo o $\sigma \in \Sigma_k$ tivermos

$$\varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_1, \dots, v_k).$$

Vamos agora definir uma projecção de $\mathcal{T}^k(V)$ no seu subespaço $\Lambda^k(V)$ o que nos permitirá definir uma multiplicação entre tensores alternantes a partir do produto tensorial.

Definição 2.3.4. A aplicação $\text{Alt}: \mathcal{T}^k(V) \rightarrow \mathcal{T}^k(V)$ é definida pela fórmula

$$\text{Alt}(\varphi)(v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

Proposição 2.3.5. A aplicação Alt é uma projecção de $\mathcal{T}^k(V)$ em $\Lambda^k(V)$. Isto é,

- (i) $\text{Alt}(\mathcal{T}^k(V)) \subset \Lambda^k(V)$,
- (ii) Se $\varphi \in \Lambda^k(V)$, então $\text{Alt}(\varphi) = \varphi$.

Em particular, $\text{Alt}^2 = \text{Alt}$.

Demonstração. Dado $\mu \in \Sigma_k$ e $\varphi \in \Lambda^k(V)$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_{\sigma\mu(1)}, \dots, v_{\sigma\mu(k)}) \\ &= \text{sgn}(\mu) \frac{1}{k!} \sum_{\sigma\mu \in \Sigma_k} \text{sgn}(\sigma\mu) \varphi(v_{\sigma\mu(1)}, \dots, v_{\sigma\mu(k)}) \\ &= \text{sgn}(\mu) \text{Alt}(\varphi)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

onde usámos que, para μ fixo, a aplicação $\Sigma_k \rightarrow \Sigma_k$ dada por $\sigma \mapsto \sigma\mu$ é bijectiva pelo que podemos indexar a soma por $\sigma\mu$ em vez de σ . Isto prova (i). Por outro lado, dado $\varphi \in \Lambda^k(V)$, temos

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\varphi)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_1, \dots, v_k) \\ &= \frac{1}{k!} k! \varphi(v_1, \dots, v_k) = \varphi(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade usámos o facto de φ ser alternante, e, na terceira, o facto de Σ_k ter $k!$ elementos. $\square$

Consideremos um exemplo para fixar ideias.

Exemplo 2.3.6. Dados $\varphi, \psi \in V^*$ e $v, w \in V$ temos

$$\text{Alt}(\varphi \otimes \psi)(v, w) = \frac{1}{2} (\varphi \otimes \psi(v, w) - \varphi \otimes \psi(w, v)) = \frac{1}{2} (\varphi(v)\psi(w) - \psi(v)\varphi(w)).$$

Analogamente, dados $\varphi, \psi, \chi \in V^*$ e $v_1, v_2, v_3 \in V$, temos

$$\begin{aligned} \text{Alt}(\varphi \otimes \psi \otimes \chi)(v_1, v_2, v_3) &= \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \Sigma_3} \text{sgn}(\sigma) \varphi \otimes \psi \otimes \chi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}) \\ &= \frac{1}{6} (\varphi(v_1)\psi(v_2)\chi(v_3) - \varphi(v_2)\psi(v_1)\chi(v_3) - \varphi(v_3)\psi(v_2)\chi(v_1) - \\ &\quad \varphi(v_1)\psi(v_3)\chi(v_2) + \varphi(v_2)\psi(v_3)\chi(v_1) + \varphi(v_3)\psi(v_1)\chi(v_2)) \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \varphi(v_1) & \varphi(v_2) & \varphi(v_3) \\ \psi(v_1) & \psi(v_2) & \psi(v_3) \\ \chi(v_1) & \chi(v_2) & \chi(v_3) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

O exemplo anterior pode facilmente ser generalizado no seguinte resultado que, tendo em conta a Proposição 2.2.5, descreve completamente o efeito da projecção Alt numa base de $\mathcal{T}^k(V)$.

Proposição 2.3.7. *Dados $\varphi_i \in V^*$ e $v_j \in V$, $\text{Alt}(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k)(v_1, \dots, v_k)$ é dado pelo determinante da matriz $(\varphi_i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ multiplicado por $\frac{1}{k!}$.*

Demonstração. Exercício. □

Note-se em particular que, aplicando a proposição anterior à base dual da base canónica de $\mathbb{R}^n$, temos que $\text{Alt}(e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k})$ se calcula multiplicando o determinante da matriz $k \times k$ formada pelas componentes $i_1, \dots, i_k$ dos k vectores dados por $\pm \frac{1}{k!}$.

Vamos agora usar a projecção para definir um produto entre tensores alternantes.

Definição 2.3.8. *Dados $\varphi \in \Lambda^k(V)$ e $\psi \in \Lambda^l(V)$, define-se $\varphi \wedge \psi \in \Lambda^{k+l}(V)$ por*

$$\varphi \wedge \psi = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\varphi \otimes \psi).$$

A constante multiplicativa é uma convenção e destina-se a eliminar o factor que apareceu a multiplicar pelo determinante no exemplo anterior.

Proposição 2.3.9. *Sejam $\varphi \in \Lambda^k(V)$, $\psi \in \Lambda^l(V)$ e $\chi \in \Lambda^m(V)$.*

- (i) *A aplicação $\wedge: \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V)$ é bilinear.*
- (ii) *$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi$.*
- (iii) *$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) = (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\varphi \otimes \psi \otimes \chi)$.*

Demonstração. (i) É imediato das definições (exercício).

(ii) A demonstração é muito semelhante à da Proposição 2.3.5(i). Seja $\mu \in \Sigma_{k+l}$ a permutação que coloca os primeiros k naturais nas últimas k posições. Isto é,

$$\mu(i) = \begin{cases} i+l & \text{se } 1 \leq i \leq k, \\ i-k & \text{se } k+1 \leq i \leq k+l. \end{cases}$$

Esta permutação pode escrever-se como um produto de kl transposições: começamos por mover 1 para a direita l posições trocando sucessivamente posições adjacentes, depois fazemos o mesmo com 2, etc... Assim $\text{sgn}(\mu) = (-1)^{kl}$. Note-se agora que $\varphi \otimes \psi(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \varphi(v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(k+l)})$ e portanto

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi(v_1, \dots, v_{k+l}) &= \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\varphi \otimes \psi)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= k!l! \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (\varphi \otimes \psi)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= k!l! \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn}(\sigma\mu) (\varphi \otimes \psi)(v_{\sigma\mu(1)}, \dots, v_{\sigma\mu(k+l)}) \\ &= k!l! \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\mu) (\psi \otimes \varphi)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= k!l! \text{sgn}(\mu) \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) (\psi \otimes \varphi)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \text{sgn}(\mu) \psi \wedge \varphi = (-1)^{kl} \varphi \wedge \psi. \end{aligned}$$

(iii) O ponto essencial da demonstração é que se $\varphi \in \mathcal{T}^k(V)$ é tal que $\text{Alt}(\varphi) = 0$ então para todo o $\psi \in \mathcal{T}^l(V)$ temos $\text{Alt}(\varphi \otimes \psi) = 0$ (em Álgebra diz-se que o núcleo de Alt é um *ideal* para o produto tensorial). Vejamos como demonstrar a fórmula

pretendida assumindo por momentos que isto é verdade. Como Alt é uma projecção temos, para todos os φ, ψ ,

$$\text{Alt} \left(\varphi \wedge \psi - \frac{(k+l)!}{k!l!} \varphi \otimes \psi \right) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) &= \frac{(k+(l+m))!}{k!(l+m)!} \text{Alt}(\varphi \otimes (\psi \wedge \chi)) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \text{Alt} \left(\varphi \otimes \left(\left(\psi \wedge \chi - \frac{(l+m)!}{l!m!} \psi \otimes \chi \right) + \frac{(l+m)!}{l!m!} \psi \otimes \chi \right) \right) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!(l+m)!} \text{Alt} \left(\varphi \otimes \left(\frac{(l+m)!}{l!m!} \psi \otimes \chi \right) \right) \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\varphi \otimes \psi \otimes \chi) \end{aligned}$$

e da mesma forma vemos que

$$(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \text{Alt}(\varphi \otimes \psi \otimes \chi).$$

Para completar a demonstração suponhamos então que $\varphi \in \mathcal{T}^k(V)$ é tal que $\text{Alt}(\varphi) = 0$ e seja $\psi \in \mathcal{T}^l(V)$. Precisamos de ver que para qualquer $(k+l)$ -tuplo de vectores $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$, se tem

$$(3) \quad \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) \varphi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \psi(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) = 0.$$

Vamos organizar esta soma de forma a escrevê-la como uma soma de termos que são claramente nulos. Para tal notemos que qualquer permutação $\sigma \in \Sigma_{k+l}$ pode ser escrita de forma única como a composição de uma permutação $\alpha(\sigma)$ que fixa os últimos l -índices seguida de uma permutação $\beta(\sigma)$ que envia os primeiros k naturais no conjunto $\{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \subset \{1, \dots, k+l\}$ *de forma crescente* (isto é $\sigma = \beta(\sigma)\alpha(\sigma)$). Por exemplo, se $k = 3, \sigma(1) = 7, \sigma(2) = 3$ e $\sigma(3) = 6$, teríamos $\beta(1) = 3, \beta(2) = 6, \beta(3) = 7$ e $\beta(i) = \sigma(i)$ para $i > 3$.

A soma no termo esquerdo da equação (3) é então igual a

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_{k+l}} \text{sgn}(\beta(\sigma)) \text{sgn}(\alpha(\sigma)) \varphi(v_{\beta(\sigma)(\alpha(\sigma)(1))}, \dots, v_{\beta(\sigma)(\alpha(\sigma)(k))}) \psi(v_{\beta(\sigma)(k+1)}, \dots, v_{\beta(\sigma)(k+l)}).$$

Os termos da soma anterior correspondentes a permutações σ que enviam $k+1, \dots, k+l$ num l -tuplo $(j_1, \dots, j_l)$ de elementos de $\{1, \dots, k+l\}$ fixo têm $\beta(\sigma) = \beta$ sempre igual. Escrevendo $w_j = v_{\beta(j)}$ e notando que $\alpha(\sigma)$ é uma permutação arbitrária dos primeiros k índices (que abreviamos por α) temos que a soma destes termos é

$$\text{sgn}(\beta(\sigma)) \psi(v_{\beta(\sigma)(k+1)}, \dots, v_{\beta(\sigma)(k+l)}) \left(\sum_{\alpha \in \Sigma_k} \text{sgn}(\alpha) \varphi(w_{\alpha(1)}, \dots, w_{\alpha(k)}) \right) = 0.$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Note-se a seguinte consequência importante do ponto (ii): Se $\varphi \in \Lambda^k(V)$ com k ímpar, temos $\varphi \wedge \varphi = (-1)\varphi \wedge \varphi \Rightarrow \varphi \wedge \varphi = 0$.

Teorema 2.3.10. Se $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ é uma base para V^* , então

$$(4) \quad \{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

é uma base para $\Lambda^k(V)$.

Demonstração. Pela Proposição 2.3.9 (ii) a troca de ordem dos factores no produto $\wedge$ afecta, quando muito, o sinal do resultado. Logo o conjunto acima tem a mesma expansão linear que

$$\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}.$$

A Proposição 2.3.9(iii) implica (por indução) que

$$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = k! \text{Alt}(\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k})$$

logo o conjunto (4) tem a mesma expansão linear que a imagem por Alt da base de $\mathcal{T}^k(V)$ obtida na Proposição 2.2.5. Conclui-se que (4) é um conjunto que gera $\Lambda^k(V)$.

Para ver que (4) é um conjunto linearmente independente considere-se uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que

$$\varphi_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A existência de uma tal base (a base dual de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$) é uma consequência do Exercício 2.4.1 e da Proposição 2.1.3.

Suponhamos que $\alpha_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$ são escalares tais que

$$\sum \alpha_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = 0.$$

Aplicando esta combinação linear a $(v_{j_1}, \dots, v_{j_k})$ com $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ obtemos, tendo em conta a Proposição 2.3.7, $0 + \dots + \alpha_{j_1 \dots j_k} + \dots + 0 = 0$. $\square$

Note-se que, em particular temos $\Lambda^k(V) = 0$ para $k > \dim(V)$. Além disso, $\dim \Lambda^n(V) = 1$ se $n = \dim(V)$ e portanto, o determinante é uma base de $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$.

2.4. Exercícios.

1. Sendo V um espaço vectorial, há uma aplicação natural $\iota: V \rightarrow (V^*)^*$ definida por $\iota(v)(\varphi) = \varphi(v)$. Mostre que
(a) ι é uma aplicação linear injectiva.
(b) ι é sobrejectiva sse V tem dimensão finita.
2. Mostre que se V é um espaço vectorial de dimensão finita e $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno em V , então a aplicação $\chi: V \rightarrow V^*$ definida por $\chi(v)(w) = \langle v, w \rangle$ é um isomorfismo.
3. Designando por $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vectorial das matrizes $n \times n$ quadradas, mostre que a aplicação $\chi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{T}^2(\mathbb{R}^n)$ definida por $\chi(A)(v, w) = v^T A w$ (onde encaramos um vector de $\mathbb{R}^n$ como uma matriz coluna e o T em superscript designa a matriz transposta) é um isomorfismo de espaços vectoriais. A que matriz corresponde o tensor $e^i \otimes e^j$? A que matriz corresponde um produto interno em $\mathbb{R}^n$ dado?
4. Mostre através de um exemplo que, em geral, $\varphi \otimes \psi \neq \psi \otimes \varphi$.
5. Sejam $V_1, \dots, V_n$ e W espaços vectoriais. Dados $\psi_i \in V_i^*$ e $w \in W$, definimos $\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \otimes w \in L(V_1, \dots, V_n; W)$ pela fórmula

$$(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \otimes w)(v_1, \dots, v_n) = \psi_1(v_1) \dots \psi_n(v_n)w.$$

- (a) Mostre que se $\{\varphi_i^{j_i}\}$ são bases de V_i^* para $i = 1, \dots, n$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ é uma base de W então uma base para $L(V_1, \dots, V_n; W)$ é dada pelo conjunto

$$\{\varphi_1^{j_1} \otimes \varphi_2^{j_2} \otimes \dots \otimes \varphi_n^{j_n} \otimes w_j\}.$$

Em particular $\dim L(V_1, \dots, V_n; W) = \dim(V_1) \dim(V_2) \dots \dim(V_n) \dim(W)$.

- (b) Mostre que a aplicação $\iota: L(V_1, L(V_2, W)) \rightarrow L(V_1, V_2; W)$ definida por

$$\iota(f)(v_1, v_2) = (f(v_1))(v_2)$$

é um isomorfismo de espaços vectoriais e generalize este resultado para aplicações multilineares com mais argumentos.

6. Seja A um aberto de $\mathbb{R}^n$ e V um espaço vectorial real de dimensão finita m . Uma base ordenada de V determina uma aplicação $\chi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ que a um vector $v \in V$ associa os coeficientes de v na base dada. Uma função $f: A \rightarrow V$ diz-se diferenciável em $x \in A$ se $\chi \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x \in A$ e nesse caso a derivada de f em $x \in A$ é a única transformação linear $Df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow V$ tal que $\chi \circ Df(x) = D(\chi \circ f)(x)$.

(a) Verifique que esta definição é independente da escolha da base para V .

- (b) Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. A *função derivada* de f é a função

$$Df: A \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

que a $x \in A$ associa a função linear $Df(x)$. A *segunda derivada* de f , notada D^2f , é definida como sendo a derivada da função Df no sentido definido acima. Usando o exercício anterior, a segunda derivada de f pode ser vista como um elemento de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Escreva a segunda derivada em termos da base para este espaço descrita no exercício anterior (considerando a base $\{e^i\}$ para $(\mathbb{R}^n)^*$).

- (c) Generalize a alínea anterior de forma a obter uma expressão para a derivada de ordem k de uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. O Lema de Schwarz garante que a função multilinear $D^k f \in L(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ associada a uma função de classe C^k tem uma propriedade especial - qual?

7. Considere os seguintes tensores

$$\begin{aligned}\alpha &= 2e^1 + 3e^2 + e^4 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^4) \\ \beta &= 2e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4) \\ \eta &= e^1 \wedge e^2 + \dots + e^{2n-1} \wedge e^{2n} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{2n})\end{aligned}$$

Represente nas bases canónicas os seguintes tensores alternantes:

- (a) $\alpha \wedge \alpha + 2\beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\beta \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \beta$,
(b) $\eta \wedge \dots \wedge \eta$ (produto com n factores).

Calcule ainda

$$\beta((0, 1, -1, 0), (1, 2, 1, -1)),$$

e

$$(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)((1, 0, 4), (0, 2, 1), (-1, 0, 1)).$$

8. Este exercício destina-se a mostrar que o sinal de uma permutação está bem definido.

(a) Mostre que qualquer permutação pode ser escrita como um produto de transposições.

- (b) Dada uma função de n variáveis $f(x_1, \dots, x_n)$ e um elemento $\sigma \in \Sigma_n$, escrevemos $\sigma \cdot f$ para a função definida por $(\sigma \cdot f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Mostre que dadas $\sigma, \mu \in \Sigma_n$ se tem $(\sigma\mu) \cdot f = \sigma \cdot (\mu \cdot f)$.

- (c) Sendo $\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ definimos $I(\sigma) \in \{\pm 1\}$ pela fórmula

$$\sigma \cdot \Delta = I(\sigma)\Delta.$$

Mostre que $I(\sigma\mu) = I(\sigma)I(\mu)$.

- (d) Mostre que $I(\tau) = -1$ se τ é uma transposição e conclua que $I(\sigma) = \text{sgn}(\sigma)$ pelo que o sinal de uma permutação está bem definido.

9. Demonstre a Proposição 2.3.7.

10. Dado um vector

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + \dots + v^n \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

definimos

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 \mathbf{e}^1 + \dots + v^n \mathbf{e}^n \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1 \mathbf{e}^2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n - \dots + (-1)^{n-1} v^n \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{n-1} \in \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

Mostre que

(a) $\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n.$

(b) Se $n = 3$,

$$\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}.$$

(c) Definimos o volume k -dimensional de um paralelepípedo gerado pelos vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ como o volume n -dimensional do paralelepípedo gerado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n$ onde os $\mathbf{w}_i$ são ortonormais e perpendiculares a todos os $\mathbf{v}_j$.

Mostre que o volume- k de um paralelepípedo é dado por $\sqrt{\det(g_{ij})}$ onde (g_{ij}) é a matriz $k \times k$ dada por $g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$.

Em particular, os vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes sse $\det(g_{ij}) = 0$.

Sugestão: Comece por considerar o caso $k = n$. Note que $(g_{ij}) = V^t V$ onde V é a matriz $n \times k$ que tem os vectores $\mathbf{v}_i$ por colunas, logo esta matriz é invariante se aplicarmos uma transformação ortogonal às arestas do paralelepípedo.

(d) Mostre que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ são linearmente dependentes sse

$$\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k} = 0.$$

Além disso $\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mathbf{v}_n} = c \det$ onde c é o determinante da matriz $n \times n$ que tem os vectores $\mathbf{v}_i$ por colunas.

Sugestão: Calcule $(\omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mathbf{v}_k})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$.

(e) O *produto externo* em $\mathbb{R}^n$ é a operação que associa a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ o vector $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ definido por

$$\Omega_{\mathbf{w}} = \omega_{\mathbf{v}_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mathbf{v}_{n-1}}.$$

Mostre que esta aplicação define um elemento de $L(\mathbb{R}^n, \dots, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, que $\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é ortogonal a cada um dos seus factores e que o seu comprimento é o volume $(n-1)$ -dimensional do paralelogramo com arestas $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.

(f) Mostre que o produto externo em $\mathbb{R}^n$ é dado pela fórmula

$$\mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \vdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}$$

3. FORMAS DIFERENCIAIS

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Um *campo vectorial* em U é uma função $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. É frequente nas aplicações (nomeadamente em Física) que estejamos interessados em pensar no vector $\vec{F}(x)$ como um vector com origem em $x \in U$. É este o caso por exemplo quando $n = 3$ e $\vec{F}$ modela um campo de forças em U .

As formas diferenciais são objectos do mesmo tipo que os campos vectoriais mas que associam a cada ponto $x \in U$ um tensor alternante em $\mathbb{R}^n$. Nas aplicações é frequentemente útil imaginar que os argumentos do valor da forma diferencial em x são vectores com origem em x e podemos então pensar numa forma diferencial de grau k

como um objecto que associa um número a cada k -tuplo de vectores de $\mathbb{R}^n$ com origem num ponto $x \in U$ dado.

3.1. A derivada exterior.

Definição 3.1.1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Uma forma diferencial de grau k é uma função $\alpha: U \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.*

Tendo em conta o Teorema 2.3.10, qualquer forma diferencial de grau k se pode escrever na forma

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k}$$

com funções $\alpha_{i_1 \dots i_k}: U \rightarrow \mathbb{R}$ unicamente determinadas. Na prática só estamos interessados em considerar formas em que estas funções são de classe C^∞ (isto é têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens) e por isso definimos

$$\Omega^k(U) = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) \mathbf{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^{i_k} : \alpha_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U) \right\}.$$

Convencionamos ainda que uma forma-0 é o mesmo que uma função C^∞ em U , e portanto

$$\Omega^0(U) = C^\infty(U).$$

É ainda usual denotar a forma-1 constante que a cada $x \in U$ associa o elemento $\mathbf{e}^i \in (\mathbb{R}^n)^*$ por dx_i . Uma forma- k em U escreve-se então

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

onde estamos a fazer já uso do produto exterior de formas $\wedge: \Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \rightarrow \Omega^{k+l}(U)$ que é dado simplesmente pela aplicação do produto $\wedge$ estudado na secção anterior em cada ponto de U .

Exemplo 3.1.2. *Em $\mathbb{R}^2$ temos (além das formas-0 que são funções) apenas formas-1, definidas por expressões da forma*

$$u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

e formas-2 da forma

$$w(x, y)dx \wedge dy.$$

Em $\mathbb{R}^3$ temos formas-1 da forma

$$u(x, y, z)dx + v(x, y, z)dy + w(x, y, z)dz,$$

formas-2 com o aspecto

$$u(x, y, z)dx \wedge dy + v(x, y, z)dx \wedge dz + w(x, y, z)dy \wedge dz$$

e formas-3 que se podem escrever na forma

$$u(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Até dimensão 3, podemos identificar qualquer forma diferencial ou com uma função escalar ou com um campo vectorial como veremos - e é isso que permite dar uma formulação mais elementar do teorema fundamental do cálculo dimensão 3. Isto deixa de acontecer para $n \geq 4$ no entanto: uma forma-2 em $\mathbb{R}^4$ tem seis coeficientes.

Vamos agora definir a *derivada exterior* que é uma operação que envia formas de grau k em formas de grau $k+1$.

Definição 3.1.3. Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dada uma função $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , isto é, um elemento de $\Omega^0(U)$, definimos a sua derivada exterior $df \in \Omega^1(U)$ pela fórmula

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Dada uma forma- k

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

definimos a sua derivada exterior pela fórmula

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Note-se que a derivada exterior de uma função é a função derivada (ver a equação (2)). Ainda mais particularmente, notemos que a derivada exterior de uma função coordenada é

$$d(x_i) = dx_i$$

o que justifica a notação introduzida antes para a forma constante igual a e^i .

Exemplo 3.1.4. (a) $d(\cos(xy)) = -y \sin(xy) dx - x \sin(xy) dy$.

(b) Uma vez que $dx \wedge dx = 0$ e $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (ver Proposição 2.3.9(ii)) e analogamente para as outras variáveis, temos

$$\begin{aligned} d((x^2 + y)dx + xzdy - (x + yz)dz) &= dy \wedge dx + zdx \wedge dy + xdz \wedge dy - dx \wedge dz - zdy \wedge dz \\ &= (z - 1)dx \wedge dy - dx \wedge dz - (z + x)dy \wedge dz. \end{aligned}$$

(c) Mais geralmente, dada uma forma 1 em $\mathbb{R}^3$, temos $d(Pdx + Qdy + Rdz) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz$, enquanto que a derivada de uma forma-2 em $\mathbb{R}^3$ é dada por $d(Pdx \wedge dy + Qdx \wedge dz + Rdy \wedge dz) = \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx \wedge dy \wedge dz$.

Para calcular a derivada exterior usam-se frequentemente as seguintes propriedades.

Proposição 3.1.5. (a) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$.

(b) $d(\omega \wedge \alpha) = (d\omega) \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge d\alpha$ onde k é o grau de ω .

(c) $d(d\omega) = 0$.

Demonstração. (a) É imediato da definição.

(b) Por (a), basta mostrar a fórmula no caso em que $\omega = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ e $\alpha = g(x)dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$. Nesse caso temos

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \alpha) &= d(f(x)g(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}) \\ &= \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_r}(x)g(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_r}(x) \right) dx_r \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \\ &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge \alpha + f(x)dg \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \\ &= d\omega \wedge \alpha + (-1)^k \omega \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}. \end{aligned}$$

(c) Pela propriedade (a), basta considerar o caso $\omega = f(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ e pela propriedade (b), uma vez que $d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = 0$, basta ver que $d(df) = 0$.

Este caso é uma consequência do lema de Schwarz:

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) dx_j \wedge dx_i \end{aligned}$$

Na expressão anterior, os termos (i, j) com $i \neq j$ cancelam aos pares pelo lema de Schwarz uma vez que $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Os termos com $i = j$ são nulos porque $dx_i \wedge dx_i = 0$.

□

Uma mnemónica para nos lembrarmos do sinal em (b) acima é pensar que d "tem grau 1 e portanto ao "trocar" d com ω temos que introduzir um sinal $(-1)^{1 \cdot k}$ onde k é o grau de ω .

Definição 3.1.6. Uma forma $\omega \in \Omega^k(U)$ diz-se fechada se $d\omega = 0$. Diz-se exacta se existe uma forma $\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\alpha = \omega$ e nesse caso a forma α diz-se um potencial para ω .

Com esta terminologia, a parte (c) da Proposição 3.1.5 diz que uma forma exacta é fechada. O recíproco não é verdade em geral como veremos em breve.

Note-se ainda que as formas-0 fechadas são as funções que têm todas as derivadas parciais nulas, ou seja, as funções que são localmente constantes.

3.2. O pullback de formas diferenciais. Dada uma transformação linear $f: V \rightarrow W$ entre espaços vectoriais e um tensor $\phi \in \mathcal{T}^k(W)$ podemos definir um tensor $f^*(\phi) \in \mathcal{T}^k(V)$ pela fórmula

$$f^*(\phi)(v_1, \dots, v_k) = \phi(f(v_1), \dots, f(v_k)).$$

É imediato verificar que a aplicação $f^*: \mathcal{T}^k(W) \rightarrow \mathcal{T}^k(V)$ definida pela fórmula anterior é uma aplicação linear. Escolhendo bases para V e W fica associada à transformação linear f uma matriz e é instrutivo achar a matriz associada às bases correspondentes de $\mathcal{T}^k(W)$ e $\mathcal{T}^k(V)$ (ver Exercício 3.4.1 abaixo).

Também é claro que se $\phi \in \Lambda^k(W) \subset \mathcal{T}^k(W)$ então $f^*(\phi) \in \Lambda^k(V)$, isto é, que o pullback de um tensor alternante é ainda um tensor alternante.

Podemos agora definir uma operação fundamental para formas diferenciais. O pullback de formas por uma aplicação de classe C^∞ .

Definição 3.2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, e $g: U \rightarrow V$ uma função de classe C^∞ . Dada uma forma $\omega \in \Omega^k(V)$ (com $k > 0$), o pullback de ω por g é a forma $g^*(\omega) \in \Omega^k(U)$ definida pela expressão

$$(g^*\omega)(x) = Dg(x)^*(\omega(g(x))).$$

A fórmula acima diz que o valor de $g^*\omega$ em $x \in U$ é o pullback do tensor $\omega(g(x))$ pela aplicação linear $Dg(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Convenciona-se definir o pullback de uma forma-0 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo $g^*(f) = f \circ g$.

Veremos que é muito simples e intuitivo calcular o pullback de formas diferenciais. Antes disso é conveniente ver algumas das propriedades do pullback.

Proposição 3.2.2. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos, e $g: U \rightarrow V$ uma função de classe C^∞ escrita $y = g(x)$.

(a) $g^*(\omega + \alpha) = g^*(\omega) + g^*(\alpha)$.

(b) $g^*(f\alpha) = (f \circ g)g^*(\alpha)$.

- (c) $g^*(\omega \wedge \alpha) = g^*(\omega) \wedge g^*(\alpha)$.
 (d) $g^*(dy_j) = dg_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} dx_i$.
 (e) $g^*(d\omega) = d(g^*(\omega))$.
 (f) $g^*(h^*(\omega)) = (h \circ g)^*(\omega)$.

Demonstração. (a) É imediato da definição.

(b) Sendo $(v_1, \dots, v_k)$ um k -tuplo de vectores em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} (g^*(f\alpha)(x))(v_1, \dots, v_k) &= ((f\alpha)(g(x)))(Dg(x)v_1, \dots, Dg(x)v_k) \\ &= f(g(x))(\alpha(g(x)))(Dg(x)v_1, \dots, Dg(x)v_k) \\ &= (f \circ g)(x)(g^*(\alpha)(x))(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

(c) É uma consequência simples de (a) e (b) e fica como exercício.

(d) Sendo v um vector de $\mathbb{R}^n$, temos $(g^*(dy_j)(x))(v) = dy_j(Dg(x)v)$ que é a j -ésima componente do vector $Dg(x)v$, ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)v_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)dx_i(v).$$

Portanto $g^*(dy_j)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)dx_i$ conforme pretendido.

(e) Começemos por ver que se f é uma função (uma forma-0) temos $g^*(df) = d(g^*f)$.

$$\begin{aligned} g^*(df) &= g^*\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(y)dy_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x))g^*(dy_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x))\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i}(x)dx_i \\ &= d(f \circ g) = d(g^*(f)). \end{aligned}$$

Consideremos agora o caso geral. Pela propriedade (a) basta mostrar a fórmula para uma forma do tipo $\omega = \alpha \wedge dy_j$. Pela propriedade (c) e o facto de ser $d(dy_j) = 0$ temos

$$(5) \quad g^*(d(\alpha \wedge dy_j)) = g^*((d\alpha) \wedge dy_j + 0) = g^*(d\alpha) \wedge g^*(dy_j).$$

Enquanto que aplicando (c) novamente

$$(6) \quad d(g^*(\alpha \wedge dy_j)) = d(g^*(\alpha) \wedge g^*(dy_j))$$

$$(7) \quad = d(g^*(\alpha)) \wedge g^*(dy_j) + (-1)^{k-1} g^*(\alpha) \wedge d(g^*(dy_j)).$$

Como $g^*(dy_j) = dg_j$ (propriedade (d) ou o caso especial das formas-0 aplicado a $f = y_j$), temos $d(g^*(dy_j)) = ddg_j = 0$ e portanto a igualdade das expressões obtidas em (5) e (7) segue por indução no grau da forma: se α é uma forma-0 temos a igualdade pelo caso especial demonstrado acima; assumindo indutivamente que $g^*(d\alpha) = dg^*(\alpha)$ para uma forma- $(k-1)$ α , os cálculos (5) e (7) mostram que o mesmo acontece para formas- k .

(f) Exercício.

□

Note-se que a propriedade (d) é um caso particular de (e) uma vez que dy_j é a derivada exterior da forma-0 definida pela j -ésima função coordenada. É ainda de observar

que as propriedades (a),(b),(c) e (f) são consequências imediatas da definição e das propriedades análogas para o pullback de tensores, como é evidente das demonstrações apresentadas acima.

Exemplo 3.2.3. Vamos considerar a transformação $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida pela expressão

$$(u, v) = g(x, y) = (x^2 + y, xy)$$

e calcular o pullback da forma $\omega = 3uv^2 du \wedge dv$ por g . Aplicando as propriedades (b) e (c) temos

$$g^*(\omega) = 3(x^2 + y)(xy)^2 g^*(du) \wedge g^*(dv)$$

e aplicando (d) isto é

$$\begin{aligned} 3x^2 y^2 (x^2 + y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) &= 3x^2 y^2 (x^2 + y) (2x dx + dy) \wedge (y dx + x dy) \\ &= 3x^2 y^2 (x^2 + y) (2x^2 - y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Vemos no exemplo acima que calcular o pullback de uma forma por uma função g consiste em fazer a substituição das variáveis da forma em questão pelas componentes correspondentes de g .

3.3. O Lema de Poincaré. Recorde-se que uma forma α se diz *fechada* se $d\alpha = 0$ e *exacta* se existe β tal que $d\beta = \alpha$. A Proposição 3.1.5(c) diz que uma forma exacta é fechada. Não é verdade em geral que uma forma fechada seja exacta. O exemplo mais simples é a forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ definida pela expressão

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

É imediato verificar que $d\omega = 0$, mas ao tentar resolver a equação $d\varphi = \omega$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

e portanto, para $x \neq 0$ temos $\varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$ com $C \in \mathbb{R}$. Ou seja, uma função potencial difere do ângulo das coordenadas polares numa constante. Ora é fácil verificar que é impossível definir uma tal função em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de forma a que seja diferenciável (ou sequer contínua). É possível fazê-lo em $\mathbb{R}^2 \setminus L$ se L for uma semi-recta com extremidade na origem e nesse caso φ não poderá ser prolongada por continuidade a qualquer ponto dessa semi-recta (a diferença entre os limites laterais será 2π).

Há no entanto condições sobre o conjunto de definição das formas que garantem que uma forma fechada é exacta.

Definição 3.3.1. Um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um conjunto em estrela se existe $x_0 \in U$ tal que para todo o $x \in U$ o segmento de recta que une x_0 a x está contido em U .

Exemplo 3.3.2. $\mathbb{R}^n$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \neq 0 \text{ ou } x > 0\}$ são conjuntos em estrela. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ não é um conjunto em estrela.

Teorema 3.3.3 (Lema de Poincaré). Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto em estrela, e $\alpha \in \Omega^k(U)$ com $d\alpha = 0$ e $k > 0$. Então existe $\beta \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\beta = \alpha$.

Demonstração. Mudando de variável podemos supor que $x_0 = 0$. Nas condições do enunciado define-se uma função

$$I: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

da seguinte forma. Dada

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

define-se

$$I\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^{j-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

onde o chapéu significa que o factor em questão é omitido do produto.

Note-se que no caso $k = 1$ a fórmula anterior dá-nos a função

$$\int_{[0,x]} (\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot d\vec{r}$$

onde $[0, x]$ designa o segmento de recta com início na origem e ponto final em x (basta substituir na definição de integral de linha a parametrização $g(t) = tx$ com $0 \leq t \leq 1$). Foi visto no curso geral que esta é uma fórmula para o potencial de um campo vectorial fechado $(\omega_1, \dots, \omega_n)$.

Contas horríveis (exercício ou ver [Sp, p. 94]) mostram que

$$d(I\omega) + I d\omega = \omega.$$

Portanto, se ω é fechada, temos que $I\omega$ é um potencial para ω , o que conclui a demonstração. $\square$

3.4. Exercícios.

- Seja $f: V \rightarrow W$ uma transformação linear representada em certas bases pela matriz A .
 - Qual é a matriz que representa $f^*: W^* \rightarrow V^*$ nas bases duais?
 - Descreva as entradas da matriz que descreve $f^*: \mathcal{T}^k(W) \rightarrow \mathcal{T}^k(V)$.
- Seja $f: V \rightarrow V$ uma transformação linear e $n = \dim V$. Mostre que $f^*: \Lambda^n(V) \rightarrow \Lambda^n(V)$ é dada por multiplicação pelo determinante da matriz que representa f numa qualquer base de V . Sugestão: Note que $\dim \Lambda^n(V) = 1$.
- Se $f: V \rightarrow W$, e $g: W \rightarrow Z$ são aplicações lineares entre espaços vectoriais e $\varphi \in \mathcal{T}^k(Z)$. Mostre que $f^*(g^*(\varphi)) = (g \circ f)^*(\varphi)$.
- Complete a demonstração da Proposição 3.2.2.
- Considere as seguintes formas diferenciais:

$$\begin{aligned} \alpha &= x^3 dx + y^2 dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2), \\ \beta &= -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0), \\ \omega &= e^{xz} dx + x \cos z dy + y^2 dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3), \\ \eta &= x dx \wedge dy - z dx \wedge dz + xyz dy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

e as funções

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } \mathbf{f}(t) = (t, t^2);$$

$$\mathbf{g}:]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definida por } \mathbf{g}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta);$$

$$\mathbf{h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definida por } \mathbf{h}(u, v, w) = (uv, vw, uw).$$

Calcule

- $\alpha \wedge \beta, \omega \wedge \eta, \eta \wedge \eta$.
 - $d\alpha, d\beta, d\omega, d\eta$.
 - $\mathbf{f}^*\alpha, \mathbf{g}^*\alpha, \mathbf{g}^*\beta, \mathbf{h}^*\eta$.
- Suponha que $g: U \rightarrow V$ é uma transformação de coordenadas de classe C^∞ (isto é, que é uma função invertível de classe C^∞ com inversa de classe C^∞). Mostre que uma forma $\omega \in \Omega^k(V)$ é fechada (respectivamente exacta) sse $g^*(\omega)$ é.
 - Decida se as seguintes formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^3$ são ou não exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

- (a) $yzdx + xzdy + xydz$;
 (b) $zdx \wedge dy - ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$;
 (c) $2dx \wedge dy + yzdx \wedge dz + xzdy \wedge dz$;
 (d) $x^2ye^z dx \wedge dy \wedge dz$.
8. Determine um potencial para a forma $x dx \wedge dy \wedge dw \in \Omega^3(\mathbb{R}^4)$.
9. Considere $\mathbb{R}^{2n}$ com as funções coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, e a forma-2

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$$

(dita a *forma simpléctica canónica*).

- (a) Mostre que ω é exacta e indique um potencial.
 (b) Seja $\mathbf{X} = (\xi^1, \dots, \xi^n, \eta_1, \dots, \eta_n) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um campo vectorial. A *contração* de $\mathbf{X}$ com ω é a forma-1 $\mathbf{X} \lrcorner \omega$ definida por

$$\mathbf{X} \lrcorner \omega(\mathbf{Y}) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

para todo o $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2n}$. Mostre que

$$\mathbf{X} \lrcorner \omega = \sum_{i=1}^n (\eta_i dq^i - \xi^i dp_i).$$

- (c) O *campo Hamiltoniano* gerado pela função $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é o campo vectorial $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que

$$\mathbf{X}_H \lrcorner \omega = -dH.$$

Mostre que

$$\mathbf{X}_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q^n} \right).$$

- (d) O campo vectorial $\mathbf{X}_H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ determina o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{X}_H(\mathbf{x}(t)).$$

Mostre que

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) = (\mathbf{X}_H \lrcorner dH)(\mathbf{x}(t))$$

e aproveite para mostrar que H é constante ao longo das soluções destas equações, i.e.,

$$\frac{d}{dt} H(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

- (e) Mostre que o sistema de equações determinado por $\mathbf{X}_H$ é

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n)$$

(*equações de Hamilton*). Escreva as equações de Hamilton para a função $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i)^2 + U(q^1, \dots, q^n).$$

10. Dado um campo eléctrico $E = (E_1, E_2, E_3)$ e um campo magnético $B = (B_1, B_2, B_3)$ dependentes do tempo t , define-se em $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (t, x, y, z) a forma-2

$$F = E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

que se chama o *tensor de Faraday*. Mostre que F é fechada sse E e B satisfazem as equações de Maxwell homogêneas $\operatorname{div} B = 0$ e $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$.

4. INTEGRAIS DE FORMAS EM VARIEDADES

Vamos agora definir o integral de uma forma- k sobre uma variedade diferencial de dimensão k . Para isso precisamos de estudar a noção de orientação de uma variedade, que por sua vez depende da noção de orientação de um espaço vectorial.

4.1. Orientações.

Definição 4.1.1. Diz-se que uma base ordenada $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$ de V tem a mesma orientação que $B_2 = (w_1, \dots, w_n)$ se a matriz (a_{ij}) tal que $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j$ tem determinante positivo.

É imediato verificar que B_1 tem a mesma orientação que B_1 , que se B_1 tem a mesma orientação que B_2 então B_2 tem a mesma orientação que B_1 e que se B_1 (respectivamente B_2) tem a mesma orientação que B_2 (respectivamente B_3) então B_1 tem a mesma orientação que B_3 . Diz-se então que a relação de "ter a mesma orientação" é uma *relação de equivalência*.

O determinante de uma matriz de mudança de base ou é positivo ou é negativo. Quando o determinante é negativo dizemos que as bases têm a *orientação oposta*. As bases de um espaço vectorial ficam assim divididos em exactamente dois conjuntos cujos elementos são bases com a mesma orientação. Cada um destes conjuntos chama-se uma *orientação* de V . Cada espaço vectorial tem portanto exactamente duas orientações. Denota-se por

$$[v_1, \dots, v_n]$$

a orientação que contém a base ordenada $(v_1, \dots, v_n)$. A orientação determinada pela base canónica de $\mathbb{R}^n$ é denotada por $+$, isto é

$$+ = [e_1, \dots, e_n].$$

Exemplo 4.1.2. Fica como exercício verificar as afirmações seguintes a partir da definição acima.

- (i) Em $\mathbb{R}^2$, uma base (v_1, v_2) tem a mesma orientação que a base canónica sse v_2 "está à esquerda" de v_1 , isto é, se o ângulo formado por v_1 com v_2 é inferior a π quando medido no sentido directo.
- (ii) Em $\mathbb{R}^3$, uma base ortonormal (v_1, v_2, v_3) pertence a $+$ sse v_3 é igual a $v_1 \times v_2$ (ou, equivalentemente, se o sentido de v_3 se obtém através da "regra da mão direita").
- (iii) Se trocarmos a ordem de dois elementos de uma base ou se trocarmos o sinal a um dos elementos obtemos uma base com a orientação oposta.

Uma orientação de um espaço vectorial pode também ser determinada por um tensor- n alternante que não se anule.

Proposição 4.1.3. Seja $\varphi \in \Lambda^n(V) \setminus \{0\}$, então $\{(v_1, \dots, v_n) : \varphi(v_1, \dots, v_n) > 0\}$ é uma orientação de V .

Demonstração. Este resultado é uma consequência do Exercício 3.4.2: Se $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ são bases de V e $w_i = \sum a_{ij} v_j$ então

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \det(a_{ij})(v_1, \dots, v_n)$$

pelo Exercício 3.4.2, logo $(w_1, \dots, w_n)$ têm a mesma orientação sse os sinais de $\omega(w_1, \dots, w_n)$ e $\omega(v_1, \dots, v_n)$ coincidem. $\square$

Definição 4.1.4. Uma orientação de uma variedade- k $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma escolha contínua de orientação de $T_x M$ para cada $x \in M$. Isto é, é uma função $x \mapsto o_x$ que a cada x associa uma orientação de $T_x M$ e tal que existe $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo

- A restrição de $\omega(x)$ a $T_x M$, $\omega(x)|_{T_x M}$ é não nula,
- o_x é a orientação de $T_x M$ determinada por $\omega(x)|_{T_x M}$.

Alternativamente, a continuidade da orientação pode ser definida da seguinte forma. A escolha da orientação o_x diz-se contínua se para cada $x \in M$ existe um aberto U contendo x e uma parametrização $g: V \rightarrow U \cap M$ com $V \subset \mathbb{R}^k$ tal que

$$o_{g(t)} = \left[\frac{\partial g}{\partial t_1}(t), \dots, \frac{\partial g}{\partial t_k}(t) \right] \text{ para cada } t = (t_1, \dots, t_k) \in V.$$

Nesse caso diz-se que a orientação é *induzida pela parametrização* g .

A equivalência entre estas duas definições de orientação de uma variedade fica como exercício (ver o Exercício 4.3.4).

Exemplo 4.1.5. (i) Se L é uma variedade-1 em $\mathbb{R}^n$, a definição de orientação em termos de parametrizações torna claro que uma orientação é exactamente o mesmo que um campo vectorial tangente unitário contínuo $\vec{t}: L \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pode demonstrar-se que qualquer variedade-1 pode ser munida de uma orientação o que já não é verdade para variedades- k com $k > 1$ (ver Exercício 4.3.5).

(ii) Se M é uma variedade- $(n-1)$ em $\mathbb{R}^n$, uma orientação é o mesmo que um campo vectorial normal unitário contínuo $\vec{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$. De facto, dada uma orientação o e uma parametrização g que a induza, obtemos uma normal

$$\vec{n}(g(t)) = \frac{\frac{\partial g}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial g}{\partial t_k}(t)}{\left\| \frac{\partial g}{\partial t_1}(t) \times \dots \times \frac{\partial g}{\partial t_k}(t) \right\|},$$

e dada uma normal contínua $\vec{n}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, não é difícil verificar que a escolha para cada $x \in M$ de uma base ordenada $(v_1, \dots, v_{k-1})$ de $T_x M$ tal que $[v_1, \dots, v_{k-1}, \vec{n}(x)] = +$ dá azo a uma orientação de M .

Definição 4.1.6. Seja M uma variedade com orientação o . Uma parametrização $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se compatível com o se $o_{g(x)}$ é a orientação induzida pela parametrização g em $T_{g(x)} M$.

Proposição 4.1.7. Seja M uma variedade- k com orientação o , e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ uma forma que determine esta orientação (cf. Definição 4.1.4). Uma parametrização $g: U \rightarrow M$ é compatível com o sse

$$g^* \omega = f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

com $f(x) > 0$ para todo o $x \in U$.

Demonstração. Exercício. $\square$

4.2. Definição do integral. Podemos agora definir o integral de uma forma- k ao longo de um subconjunto parametrizado de uma variedade- k orientada.

Definição 4.2.1. Seja $A \subset \mathbb{R}^k$ e $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ uma forma- k . Define-se o integral de ω sobre A com a orientação $+$ pela fórmula

$$\int_{A^+} \omega = \int_A f.$$

Dada uma variedade- k M com orientação o , $g: U \rightarrow M$ uma parametrização e $A \subset g(U)$ define-se

$$\int_{A^o} \omega = \int_{g^{-1}(A)^+} g^* \omega.$$

Na prática, exigir que o domínio de integração A esteja contido na imagem de uma parametrização não é verdadeiramente uma restrição uma vez que se pode demonstrar que qualquer variedade- k M tem um subconjunto fechado com medida k -dimensional nula N tal que $M \setminus N$ admite uma parametrização. Para calcular o integral sobre um conjunto $A \subset M$ qualquer basta portanto calcular o integral sobre $A \setminus N$.

Exemplo 4.2.2. *Seja*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

e o a orientação correspondente ao sentido horário. Para calcular

$$\int_{C^o} -ydx + xdy$$

podemos usar a parametrização $g:]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(\theta) = (\cos \theta, -\sin \theta)$$

uma vez que esta é compatível com a orientação dada. Temos

$$g^*(-ydx + xdy) = -\sin \theta d(\cos \theta) + \cos \theta d(\sin \theta) = (\sin^2 + \cos^2) d\theta$$

pelo que

$$\int_{C^o} -ydx + xdy = \int_{]0, 2\pi[+} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Exemplo 4.2.3. *Consideremos o toro*

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, \quad z^2 + w^2 = 1\}$$

com a orientação o induzida pela parametrização $g:]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$g(\theta, \varphi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi).$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{M^o} yw dx \wedge dz &= \int_{(]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[)^+} g^*(yw dx \wedge dz) \\ &= \int_{(]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[)^+} \sin(\theta) \sin(\varphi) d(\cos \theta) \wedge d(\cos \varphi) \\ &= \int_{(]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[)^+} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta \wedge d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\theta d\varphi = \pi^2. \end{aligned}$$

É necessário verificar que a Definição 4.2.1 é independente da escolha de parametrização.

Proposição 4.2.4. *Seja M uma variedade- k com orientação o , $g_i: U_i \rightarrow M$ com $i = 1, 2$ parametrizações compatíveis com a orientação e $A \subset g_1(U_1) \cap g_2(U_2)$. Então, dada $\omega \in \Omega^k$,*

$$\int_{g_1^{-1}(A)^+} g_1^* \omega = \int_{g_2^{-1}(A)^+} g_2^* \omega.$$

Demonstração. A ideia da demonstração é que os dois integrais que aparecem no enunciado diferem numa mudança de variável pela mudança de variável $\varphi = g_1^{-1} \circ g_2$. A demonstração que φ é de classe C^1 fica como exercício (ver Exercício 4.3.3). Como g_1 e g_2 são parametrizações, as suas derivadas são isomorfismos

$$Dg_i(x): \mathbb{R}^k \rightarrow T_{g_i(x)}M.$$

A condição de compatibilidade com a orientação de M implica por sua vez que $D\varphi(x) = Dg_1|_{T_{g_1(x)}M} \circ Dg_2(x)$ (ver Exercício 4.3.3(c) para a validade desta fórmula) tem determinante positivo. Escrevendo $A_i = g_i^{-1}(A)$ e

$$g_i^*(\omega) = f_i(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

temos então mudando de variável por φ

$$\begin{aligned} \int_{g_1^{-1}(A)^+} g_1^* \omega &= \int_{g_1^{-1}(A)} f_1 \\ &= \int_{\varphi^{-1}(g_1^{-1}(A))} f_1 \circ \varphi |\det D\varphi| \\ &= \int_{g_2^{-1}(A)} f_1 \circ \varphi \det D\varphi. \end{aligned}$$

Mas pelo Exercício 3.4.2, temos que

$$f_1 \circ \varphi \det D\varphi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \varphi^* g_1^* \omega = g_2^* \omega,$$

logo

$$\int_{g_2^{-1}(A)} f_1 \circ \varphi \det D\varphi = \int_{g_2^{-1}(A)^+} g_2^* \omega,$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Apesar de na prática nunca precisarmos de calcular integrais em conjuntos que não sejam parametrizáveis, é necessário definir de forma rigorosa o integral num subconjunto arbitrário de uma variedade orientada. Esta definição é bastante técnica e recorre a um conceito - o de *partição da unidade* - que é útil em muitas outras situações, nomeadamente na demonstração da fórmula de mudança de variável de integração.

Se ω é uma forma que se anula excepto na imagem de uma parametrização $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ (compatível com uma orientação *o* dada), faz sentido definir

$$\int_{M^o} \omega = \int_{V^+} g^* \omega$$

uma vez que o integral de ω em $M \setminus g(V)$ deve ser 0. A ideia da definição geral de integral de uma forma ω é escrever ω como uma soma de formas cada uma das quais se anula fora da imagem de alguma parametrização, aplicar a cada uma destas a definição anterior e finalmente somar os escalares assim obtidos. Este processo é implementado usando uma decomposição da função constante igual a 1 numa soma de funções de classe C^∞ cada uma das quais se anula num conjunto conveniente.

Proposição 4.2.5. *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, e uma família de abertos $\{U_\alpha\}$ com $A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, existe uma família Φ de funções de classe C^∞ definidas em $\mathbb{R}^n$ e satisfazendo:*

- (i) $0 \leq \varphi \leq 1$ para todo o $\varphi \in \Phi$,
- (ii) Para cada $\varphi \in \Phi$, existe α tal que $\overline{\{x \in V: \varphi(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha$,
- (iii) Para cada $x \in V$, existe $\epsilon > 0$ tal que apenas um número finito de elementos de Φ não se anula identicamente na bola de raio ϵ centrada em x .
- (iv) $\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1$ para todo o $x \in A$.

Demonstração. Ver [Sp, p. 63]. $\square$

Note-se que a condição (iii) implica que a soma no item (iv) faz sentido. Uma família Φ satisfazendo as condições da proposição anterior diz-se uma *partição da unidade* subordinada à família $\{U_\alpha\}$.

Uma partição da unidade permite expressar uma função (ou uma forma) como uma soma de termos que se anulam fora de um aberto (de uma família dada):

$$\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi \omega.$$

Dada uma variedade- k $M \subset \mathbb{R}^n$, é evidente que existe uma família $\{U_\alpha\}$ de abertos de $\mathbb{R}^n$ tal que

- $M \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$,
- $U_\alpha \cap M$ é a imagem de uma parametrização $g_\alpha: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Tomando para Φ uma partição da unidade subordinada a uma tal família $\{U_\alpha\}$ e sendo $A \subset M$ um subconjunto de uma variedade- k com orientação o , define-se para ω uma forma- k definida numa vizinhança de A

$$(8) \quad \int_{A^o} \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{A^o} \varphi \omega$$

onde cada um dos termos na soma do lado direito é calculado pela fórmula da Definição 4.2.1 (com uma parametrização g tal que $\varphi \omega$ se anule no complementar da imagem de g).

É necessário demonstrar que esta definição é independente da escolha da partição da unidade. Deixamos esta verificação como exercício. Os leitores poderão ainda consultar [Sp, p. 65].

Observe-se ainda que, para que (8) faça sentido, é necessário que a soma em questão faça sentido. Tal é o caso se Φ é uma família finita, algo que acontece desde que M seja uma variedade *compacta* (note-se que nesse caso M pode ser coberta por um número finito de imagens de parametrizações).

4.3. Exercícios.

1. Calcule $\int_{M^o} \omega$ onde

- (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } x = z\}$, com orientação o determinada por dz no ponto $(0, 1, 0)$ e $\omega = ydx + xdy + zdz$.
- (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 1 + z^2 = x^2 + y^2, |z| < 1\}$ com a orientação o determinada pelo vector normal unitário que aponta no sentido oposto ao eixo dos zz e $\omega = zdx \wedge dy$.
- (c) $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: x^2 + 2y^2 = 2, z^2 + 3w^2 = 3\}$ com a orientação o determinada por $dy \wedge dw$ no ponto $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{3}, 0)$, e $\omega = ywdx \wedge dz + xzdy \wedge dw - yzdx \wedge dw - xwdy \wedge dz$.

2. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 tal que $g|_{[a, b]}$ é uma parametrização de uma variedade-1. Mostre que

$$\int_{g([a, b])^o} df = f(g(b)) - f(g(a))$$

em que o designa a orientação induzida pela parametrização g . Use este facto para mostrar que

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

não é uma forma exacta.

3. Sejam $g_i: U_i \rightarrow M$ com $i = 1, 2$ duas parametrizações de uma variedade- k em $\mathbb{R}^n$ com $g_1(U_1) \cap g_2(U_2) \neq \emptyset$. Seja $V = g_1^{-1}(g_2(U_2))$ e $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ a função definida por $\varphi = g_2^{-1} \circ g_1$.

- (a) Seja t um ponto de $\varphi(V)$. Supondo sem perda de generalidade que as primeiras k linhas de $Dg_2(t)$ são linearmente independentes, mostre que a função $G: \varphi(V) \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$G(x_1, \dots, x_n) = g_2(x_1, \dots, x_k) + (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

é invertível numa vizinhança de t .

- (b) Designando a inversa local de G por H , mostre que

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = H(g_1(x_1, \dots, x_k))$$

para $(x_1, \dots, x_k)$ numa vizinhança de $\varphi^{-1}(t)$ e conclua que φ é uma função de classe C^1 no seu domínio.

- (c) Mostre que $D\varphi = Dg_2^{-1}(g_1(t)) \circ Dg_1$ onde $Dg_2^{-1}(g_2(s))$ denota a inversa da transformação linear $Dg_2(s): \mathbb{R}^k \rightarrow T_{g_2(s)}M$.

4. Este exercício destina-se a demonstrar a equivalência entre as duas definições de orientação numa variedade. Seja M uma variedade- k em $\mathbb{R}^n$.

- (a) Seja $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega|_{T_x M} \neq 0$ para todo o $x \in M$. Mostre que para cada $x \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e uma parametrização $g: V \rightarrow U \cap M$ tal que $g^*(\omega) = f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ com $f > 0$ e conclua que a orientação determinada por ω em cada $T_x M$ é a orientação induzida pela parametrização g .

- (b) Sendo $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de M e $t \in V$, mostre que existe um aberto U de $\mathbb{R}^n$ contendo $g(t)$, com $U \cap M \subset g(V)$ e $\omega \in \Omega^k(U)$ tal que $g^*(\omega) = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k$.

- (c) Se $\alpha, \beta \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ são tais que $\alpha|_{T_x M} \neq 0$, $\beta|_{T_x M} \neq 0$ e α, β determinam a mesma orientação de $T_x M$ então para todo o $0 \leq t \leq 1$, a forma $t\alpha + (1-t)\beta$ tem as mesmas propriedades.

- (d) Dada uma orientação o para M , use as alíneas (b) e (c) e uma partição da unidade para construir uma forma $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega|_{T_x M} \neq 0$ e $\omega|_{T_x M}$ determina a orientação o para todo o $x \in M$.

5. A banda de Möbius M é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado pela imagem da aplicação $g:]-1, 1[\times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(s, \theta) = ((2 + s \cos(\frac{\theta}{2})) \cos \theta, (2 + s \cos(\frac{\theta}{2})) \sin \theta, s \sin(\frac{\theta}{2})).$$

- (a) Mostre que M é uma variedade-2.

- (b) Mostre que M não é orientável.

5. O TEOREMA DE STOKES

5.1. Variedades com bordo. Um difeomorfismo é uma aplicação $\varphi: U \rightarrow V$ de classe C^∞ com U e V abertos de $\mathbb{R}^n$ que tem uma inversa de classe C^∞ . No curso geral, a terminologia utilizada foi a de *transformação de coordenadas* de classe C^∞ . Note-se que por definição, a inversa de um difeomorfismo é um difeomorfismo.

É uma consequência do Teorema da Função Inversa que um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão k sse para cada $x \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x , um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ com $\varphi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$, onde designamos por $\mathbb{R}^k$ o subconjunto $\{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0): x_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$. Note-se que compondo o difeomorfismo com uma translação podemos sempre supor que $\varphi(x) = 0$

Definição 5.1.1. Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma variedade- k com bordo se para cada $x \in M$, existe um aberto U contendo x , um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo 0 e um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$, tal que $\varphi(x) = 0$ e

(i) $\varphi(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^k$, ou

(ii) $\varphi(U \cap M) = V \cap \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0): x_1 \leq 0 \text{ e } x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}\}$.

Os pontos que satisfazem a condição (ii) acima dizem-se os pontos do *bordo* de M , que se denota por ∂M . É uma consequência do Teorema da Função Inversa que os casos (i) e (ii) são mutuamente exclusivos (exercício).

É claro da definição acima que ∂M é uma variedade- $(k-1)$ (sem bordo). De facto, a restrição dos difeomorfismos φ do item (ii) ao bordo (a imagem inversa do conjunto definido pela equação $x_1 = 0$) dão difeomorfismos locais de $\partial M \cap U$ com $V \cap \mathbb{R}^{k-1}$ (sendo $\mathbb{R}^{k-1}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ definido pela equação $x_1 = 0$.)

A observação que o bordo do bordo é vazio, isto é, a equação

$$\partial \partial M = \emptyset$$

deve ser comparada com a Proposição 3.1.5(c).

Sendo M uma variedade com bordo, escreve-se

$$\dot{M} = M \setminus \partial M$$

para o *interior* da variedade com bordo M . Uma orientação de M é, por definição, uma orientação de $\dot{M}$. $\dot{M}$ é então uma variedade no sentido usual do termo. Se ω é uma forma- k , define-se o integral de ω sobre M por

$$\int_M \omega = \int_{\dot{M}} \omega,$$

(a ideia sendo que o bordo de M tem volume k -dimensional desprezável).

Se φ é como na Definição 5.1.1, a restrição de φ^{-1} a $\mathbb{R}^k \cap V$ no caso (i) fornece uma parametrização de $M \cap U$, enquanto que, no caso (ii) a restrição de φ^{-1} a $\mathbb{R}^{k-1} \cap V$ fornece uma parametrização de $\partial M \cap U$ e a restrição de φ^{-1} a $\{x \in \mathbb{R}^k : x_1 < 0\} \cap V$ é uma parametrização de $\dot{M} \cap U$.

Seja M uma variedade- k com uma orientação o e $\varphi: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo como na Definição 5.1.1(ii). Se $\varphi|_{\{x: x_1 < 0, x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}}$ é compatível com a orientação dada, a *orientação induzida* por o no bordo é a orientação induzida pela parametrização

$$\varphi|_{\{x: x_1 = x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}}^{-1}: V \cap \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \partial M.$$

Se $k = 1$, não é sempre possível escolher φ como na Definição 5.1.1 que induza uma orientação dada (e também não definimos o que é uma orientação de uma variedade-0). Convencionou-se que uma variedade-0 é um conjunto de pontos, e uma orientação de uma variedade-0 é uma escolha de sinal $+$ ou $-$ para cada um destes pontos. A orientação induzida no bordo de uma variedade-1 é então a atribuição do sinal $+$ aos pontos do bordo para os quais é possível achar φ como na Definição 5.1.1(ii) e $-$ aos restantes. Compare-se com o Exercício 4.3.2.

Exemplo 5.1.2. *Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Então M é uma variedade-2 com bordo $\partial M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 = 1\}$. Se o for a orientação de M determinada pela parametrização $g:]0, 1[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^2),$$

a orientação induzida no bordo é a determinada pela restrição de g ao segmento de recta $r = 1$, ou seja a orientação induzida pela parametrização $h(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$. Isto porque é indiferente na definição de orientação induzida que o domínio da parametrização utilizada seja $r < 1$ ou $r < 0$. Pode passar-se de uma situação a outra compondo com uma translação.

É imediato verificar que, em termos das noções de orientação de curvas e superfícies do curso geral, esta noção de orientação induzida no bordo corresponde à orientação determinada pela regra da mão direita.

5.2. A fórmula de Stokes.

Teorema 5.2.1 (Teorema de Stokes). *Seja M uma variedade- k com bordo compacta com orientação o e ω uma forma- $(k-1)$ definida num aberto contendo M . Denotando ainda por o a orientação induzida por o no bordo ∂M tem-se*

$$\int_{M^o} d\omega = \int_{\partial M^o} \omega.$$

Demonstração. Suponhamos que $k > 1$ - o caso $k = 1$ fica como exercício (o integral do lado direito deve ser encarado como uma soma com os sinais dados pela orientação dos valores da função sobre os pontos do bordo - ver Exercício 4.3.2).

Como M é compacta podemos escolher uma partição da unidade finita Ψ subordinada a uma família de abertos $\{U_\alpha\}$ com $U_\alpha \cap M$ domínio de um difeomorfismo $\varphi_\alpha: U_\alpha \cap M \rightarrow V_\alpha$ como na Definição 5.1.1. Chamamos g_α à parametrização de $U_\alpha \cap M$ determinada pela inversa de um tal difeomorfismo, e por h_α a correspondente parametrização do bordo de M (no caso em que o difeomorfismo se refere a um ponto do bordo). Compondo, se necessário o difeomorfismo φ_α com a função $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, -x_2, x_3, \dots, x_n)$ podemos assumir⁴ que g_α é compatível com a orientação o .

Temos então

$$\int_{M^o} d\omega = \int_{M^o} d\left(\sum_{\psi \in \Psi} \psi \omega\right) = \sum_{\psi \in \Psi} \int_{M^o} d(\psi \omega).$$

Basta portanto demonstrar o Teorema para formas que se anulem fora de um dos abertos da forma $U_\alpha \cap M$ (e também numa vizinhança da fronteira de U_α).

Para uma tal forma β temos,

$$\int_{M^o} d\beta = \int_{g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M)^+} d(g_\alpha^* \beta).$$

Ora $g_\alpha^* \beta$ pode ser escrito na forma

$$g_\alpha^* \beta = \sum_{i=1}^k a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k$$

logo

$$d(g_\alpha^* \beta) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

e portanto

$$\int_{g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M)^+} d(g_\alpha^* \beta) = \int_{g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M)} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}.$$

Podemos calcular o integral de cada parcela $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ integrando primeiro em ordem a dx_i e, excepto quando $i = 1$ e estamos no caso (ii) da Definição 5.1.1, vemos que este integral é 0 pelo Teorema Fundamental do Cálculo de Cálculo I.

No caso que resta temos, ainda pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M)} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = \int_{g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M) \cap \{x: x_1=0\}} a_1(0, x_2, \dots, x_k).$$

Uma vez que $h_\alpha^*(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k) = 0$ excepto quando $i = 1$, e $g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M) \cap \{x: x_1=0\} = h_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap \partial M)$ temos

$$\int_{g_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap M) \cap \{x: x_1=0\}} a_1(0, x_2, \dots, x_k) = \int_{h_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap \partial M)} h_\alpha^* \beta = \int_{(\partial M)^o} \beta,$$

⁴É aqui que estamos a usar a hipótese de k ser maior do que 1.

o que conclui a demonstração. $\square$

5.3. Relação com os Teoremas Fundamentais do Cálculo Vectorial. Nesta secção final vamos explicitar a relação entre os integrais de formas e o Teorema de Stokes demonstrado na secção anterior e os Teoremas Fundamentais do Cálculo Vectorial - nomeadamente o Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha, o Teorema de Green e os Teoremas da Divergência e de Stokes.

Esta relação baseia-se na seguinte correspondência entre campos vectoriais e formas.

Definição 5.3.1. *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F = (F_1, \dots, F_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vectorial. A forma-1 associada a F é a forma $\omega_F \in \Omega^1(U)$ dada pela expressão*

$$\omega_F = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n.$$

A forma- $(n-1)$ associada a F é a forma Ω_F determinada pela expressão

$$\Omega_F = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dada uma função (ou, equivalentemente, uma forma-0) $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a forma- n associada a f por

$$\alpha_f = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

A seguinte proposição é agora uma consequência imediata das definições da derivada exterior, gradiente, rotacional e divergência. O seu conteúdo é que, o gradiente, rotacional e divergência correspondem à derivada exterior de formas mediante a identificação definida acima entre formas e funções ou campos vectoriais.

Proposição 5.3.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vectorial e $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então*

- (i) $df = \omega_{\nabla f}$.
- (ii) $d\Omega_F = \alpha_{\text{div } F}$.
- (iii) Se $n = 3$, então $d\omega_F = \Omega_{\text{rot } F}$.

Demonstração. Exercício. $\square$

Para completar a interpretação dos Teoremas Fundamentais do Cálculo Vectorial como casos particulares do Teorema 5.2.1 resta identificar os integrais de formas-1 com integrais de linha de campo vectorial, e os integrais de formas- $(n-1)$ com fluxos de campos vectoriais através de variedades de dimensão $(n-1)$ em $\mathbb{R}^n$.

Vejamos por exemplo que se M é uma variedade-1 com orientação o e $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial então

$$\int_{M^o} \omega_{\vec{F}} = \int_M \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

De facto, sendo $g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização de M compatível com a orientação o temos

$$\begin{aligned} \int_{M^o} \omega_{\vec{F}} &= \int_{]a, b[} g^*(F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n) \\ &= \int_{]a, b[} F_1(g(t)) dg_1 + \dots + F_n(g(t)) dg_n \\ &= \int_{]a, b[} (F_1(g(t))g'_1(t) + \dots + F_n(g(t))g'_n(t)) dt \\ &= \int_a^b F_1(g(t))g'_1(t) + \dots + F_n(g(t))g'_n(t) dt \\ &= \int_M \vec{F} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

A verificação análoga para fluxos fica como exercício (ver Exercício 5.4.5). Vejamos por exemplo como obter o Teorema de Stokes usual: Sendo o a orientação determinada por uma normal unitária $\vec{n}$ a uma superfície temos

$$\int_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{S^o} \Omega_{\text{rot } \vec{F}} = \int_{S^o} d\omega_{\vec{F}} = \int_{\partial S^o} \omega_{\vec{F}} = \int_{\partial S^o} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

As verificações análogas para os Teoremas de Green e da divergência ficam como exercício.

5.4. Exercícios.

- Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, x \leq 1\}$. Usando o Teorema de Stokes,
 - Calcule $\int_{M^\mu} z dx \wedge dy + x dz \wedge dy$ onde μ é a orientação determinada pela normal a M com primeira componente positiva.
 - Calcule $\int_{\partial M} y dz$ sendo ∂M percorrida no sentido que visto da origem é a dos ponteiros do relógio.
- Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_{M^o} (1 + z^2) dx \wedge dy$ onde o é a orientação determinada pela normal exterior à esfera.
- Seja $M = \{(x, y, z, w) : w^2 + 1 = x^2 + y^2 + z^2, 0 \leq w \leq 2\}$. Calcule $\int_{M^o} dx \wedge dy \wedge dz$ onde o é a orientação de M determinada pela normal que aponta na direcção do eixo dos ww .
- Mostre a Proposição 5.3.2.
- Seja M uma variedade- $(n-1)$ em $\mathbb{R}^n$ com orientação o determinada pela normal unitária $\vec{n} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sendo $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vectorial, mostre que

$$\int_M \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{M^o} \Omega_{\vec{F}}.$$

Sugestão: Reveja o Exercício 2.4.10.

- Mostre que a forma-2 em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definida por

$$\omega = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dz \wedge dx + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx \wedge dy$$

não é exacta.

REFERÊNCIAS

- [Ja] K. Jänich, *Vector Analysis*, Springer, 2001.
 [Sp] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Perseus books, 1965.