Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 7 - 23 a 27 de Outubro de 2023

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

   a) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$,

   b) $\varphi' = e^{\varphi - t}$,

   c) $xy + (1+x^2)y' = 0$,

   d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$,

   e) $2ty^3 + 3t^2y^2y' = 0$,

   f) $(1+t)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{5/2}$.

2. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta, \varphi(1) = \alpha$ e determine para que valores de α é que a solução está definida para todo o $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Considere a equação diferencial separável $x' = x\operatorname{sen} t + x^2 \operatorname{sen} t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

4. Determine as curvas ortogonais às soluções de $y' = y$ e esboce-as.

5. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \operatorname{sen} y - 1$$

   Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \operatorname{sen} y$

6. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

   em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

7. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

(a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

(b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidads e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

8. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

9. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty},$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

10. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0 \qquad , \qquad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

11. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + \left(y^3 - \log x\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

a) Verifique que (2) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.

b) Prove que as soluções de (2) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y}\log x$$

c) Determine a solução de (2) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

12. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

13. Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \tag{3}$$

Mostre que a equação não é exacta. Determine um factor integrante para a equação (3), e com ele a solução que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$. Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

14. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2\left(\dfrac{1}{x} + \log x\right) + 2y\log x\dfrac{dy}{dx} & = 0 \\ \\ y(e) & = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

15. Considere a equação diferencial ordinária

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{4}$$

a) Mostre que (4) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

b) Mostre que a solução de (4) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1, da solução dada implicitamente na alínea anterior.