Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 4 - 2 a 6 de Outubro de 2023

1. Confirme a validade do teorema de Stokes quando aplicado ao campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, z, x)$$

e à superfície S, que consiste do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de forma a que o seu vector normal tem segunda componente positiva.

2. Use o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS$ sendo

   (a) S é a porção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 z^2, y^2 z^2, xyz).$$

   (b) S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, em que se considera a normal ν com primeira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{xy} \cos z, (x^2 y^2 + 1) z, -y).$$

   (c) S é a parte do plano $x + z = 1$ no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, -z, y).$$

3. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu \, dS$ num integral de linha e calcule-o, sendo:

   (a) S a superfície $z = x^2 + y^2$ com $z \leq 1$, sendo ν a normal com componente z positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, y, 0)\,.$$

   (b) S a superfície parametrizada por $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, $u > 0$, $v > 0$, $u + v < 1$, sendo ν a normal com terceira componente positiva e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

4. Use o teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\gamma$, em que:

(a) C é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, -z, y).$$

(b) C é a curva de intersecção do plano $x + z = 5$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 2z, 3y).$$

5. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $\mathbf{F}$ ao longo da curva C, sendo:

(a) C é a fronteira do polígono de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, e $(0, 2, 1)$ (percorridos neste sentido) e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, 2xy, 4y^2).$$

(b) C o bordo da superfície

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 + z^2 = 1 \ , \ 0 < x < 1\Big\},$$

com a orientação induzida por uma parametrização à sua escolha, e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

(c) C é a curva parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t)\big) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3\big).$$

6. Sendo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, \cos(x^2 + y^2 + z^2))$, calcule o fluxo de $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ através da superfície

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < z = x^2 + y^2 - 1 < 3\Big\}$$

no sentido da normal com terceira componente negativa.

7. Considere o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x - z, y - x, z - xy\big)$$

(a) Use o Teorema de Stokes para determinar a circulação em torno do triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, orientado no sentido anti-horário quando visto da origem para o primeiro octante.

(b) Calcule a densidade de circulação de $\mathbf{F}$ na origem na direção de $\mathbf{e_3}$, ou seja,

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{e_3}$$

(c) Encontre o vector unitário ν tal que a densidade de circulação de $\mathbf{F}$ na origem seja máxima na direção de ν.

8. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2 + z^2 \ , \ 1 < y < 4\},$$

orientada segundo a normal unitária $\overrightarrow{n} = (n_x, n_y, n_z)$ tal que $n_y < 0$.

   (a) Calcule a área de S.

   (b) Calcule o fluxo de $\mathbf{G}(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de $\overrightarrow{n}$, utilizando o teorema da divergência.

   (c) Calcule o fluxo de $\mathbf{G}(x, y, z) = (-xy, y^2, -yz)$ através de S no sentido de $\overrightarrow{n}$, utilizando o teorema de Stokes.

9. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - x^2 - y^2 \ ; x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\}.$$

   (a) Parametrize a superfície S.

   (b) Calcule a área de S.

   (c) Considere o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

$$W = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

   no sentido horário quando visto do ponto $(10, 10, 10)$, usando o Teorema de Stokes.

   (d) Determine o fluxo de $\mathbf{G}(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3 z + 2)$ através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o Teorema da Divergência.

10. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 = 1 \ ; \ x > 0\},$$

orientada com a normal unitária ν à sua escolha. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, 2z, 2xy)$. Calcule o fluxo $\displaystyle\int_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$

   (a) Pelo teorema da divergência.

   (b) Pelo teorema de Stokes.

11. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, -xz, xy - 2)$

   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \operatorname{sen} z, y \operatorname{sen} z, \cos z)$

12. Suponha que S é uma superfície e C o seu bordo, satisfazendo as hipóteses do teorema de Stokes, e f e g têm derivadas parciais contínuas de segunda ordem. Demonstre que

   i) $\displaystyle\oint_C (f \nabla g) \cdot d\gamma = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \nu \, dS.$

   ii) $\displaystyle\oint_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\gamma = 0.$