Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 3 - 18 a 22 de Setembro de 2023

1. Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$ através da superfície S orientada da forma indicada, sendo:

   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, xz, 3xzy^2)$ e a superfície

   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -x^2 + y^3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1\},$$

   orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ e

   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 - 1 \ ; \ z < 0 \ ; \ y > 0\},$$

   orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$.

   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$ e S o cone definido por

   $$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad 0 < z < 1$$

   orientado com a normal n com terceira componente positiva.

   (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$, em que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua, e S a esfera de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

2. Seja f um campo escalar e $\mathbf{F}$ um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique porquê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

   (a) ∇f

   (b) $\operatorname{rot}(\nabla f)$

   (c) $\nabla(\operatorname{div} \mathbf{F})$

   (d) $\operatorname{div}(\operatorname{div} \mathbf{F})$

   (e) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\nabla f))$

3. Determine o rotacional e a divergência do campo vetorial

   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\log x, \log(xy), \log(xyz)) \qquad xyz \neq 0.$

   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z)\,.$

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(0, e^{xy}\text{sen}\, z, y \arctan \frac{x}{z}\right)$.

4. Verifique se os seguintes campos vetoriais são irrotacionais e/ou solenoidais:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy) \quad , \quad \mathbf{G}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2).$$

5. Verifique as seguintes identidades sendo $\mathbf{r} = (x,y,z)$ e $r = |\mathbf{r}|$ (para $r > 0$).

(a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

(b) $\Delta r^3 = 12r$

(c) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

6. As equações de Maxwell relacionam o campo elétrico $\mathbf{E}$ e o campo magnético $\mathbf{B}$ em função da posição, $\mathbf{r} = (x,y,z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, em que Ω é uma região aberta. No vazio, essas equações são:

$$\begin{aligned} \text{div}\, \mathbf{E} &= 0 \\ \text{div}\, \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot}\, \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot}\, \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

em que c é a velocidade da luz. Use essas equações para demonstrar o seguinte:

(a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$

(c) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{E}$

(d) $\dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{B}$

Sugestão: Para provar as equações das ondas (c) e (d) a partir de (a) e (b), mostre primeiro a fórmula

$$\text{rot}(\text{rot}\, \mathbf{F}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\text{div}\, \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F},$$

onde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial de classe C^2 na região Ω e o laplaciano do um campo vetorial $\mathbf{F}$ é dado por

$$\Delta \mathbf{F} = \big(\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3\big).$$

7. Verifique a validade do teorema da divergência para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região E, onde:

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e E é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x, xy, 2xz)$ e E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, yz, zx)$ e E é o cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

8. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS$ onde
   (a) $\mathbf{F} = (x, y, z^2)$ e S é a fronteira do sólido $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, x + y + z^2)$, S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$ e ν é a normal unitária que aponta para fora o cilindro.
   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3 e^z, -xy, x \arctan y)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.
   (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y \,\mathrm{sen}\, x, y^2 z, x + 3z)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$.

9. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3xy^2, xe^z, z^3)$$

   e S é a superfície do sólido delimitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$.

10. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 y, -x^2 y^2, -x^2 yz)$ e S é a superfície do sólido delimitado pelo hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e pelos planos $z = -2$ e $z = 2$.

11. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \mathrm{sen}\, y, e^x \cos y, y^2 z)$ e S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 2$.

12. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x, xz, z^2)$ e S é a superfície da região delimitada pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o plano-xy.

13. Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^4, -x^3 z^2, 4xy^2 z)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = x + 2$ e $z = 0$.

14. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$ onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) \ = \ \left(z^2 x, \ \frac{1}{3} y^3 + \tan z, \ x^2 z + y^2\right)$$

   e S é o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com ν orientado para fora da esfera.

   Nota: S não é uma superfície fechada.

15. Seja $\mathbf{F} = (z \arctan y^2, z^3 \ln(x^2 + 1), z)$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para cima.

   Nota: S não é uma superfície fechada.

16. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial definido por:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xf(z), -yf(z), z),$$

   em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua. Calcule o fluxo do campo $\mathbf{F}$ através da superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, 0 < z < 1\},$$

   na direção da normal com a terceira componente positiva.

17. Calcule o volume do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z < 1\}$$

usando o teorema da divergência.

18. Use o teorema da divergência para encontrar todos os valores positivos k tais que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^k}$$

satisfaça a condição $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ quando $\mathbf{r} \neq 0$.

19. Suponha que S e E satisfaçam as condições do teorema da divergência. Mostre que, se $\overrightarrow{a}$ é um vetor constante, então tem-se sempre que o fluxo de $\overrightarrow{a}$ para o exterior de S é nulo:

$$\iint_S \overrightarrow{a} \cdot \nu \, dS = 0.$$

20. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e e o campo vetorial definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

Mostre que

$$\text{Volume}\, E = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$$

sendo ν a normal exterior a S.

21. Sejam S e E nas condições do teorema da divergência e $\mathbf{F}$ um campo vetorial com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Demonstre a identidade

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \nu dS = 0.$$

22. Demonstre as identidades abaixo, supondo que S e E satisfaçam as condições do teorema da divergência e que as funções escalares f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

    i) $\displaystyle\iiint_E f \Delta g \, dV \quad = \quad \iint_S f \, \nabla g \cdot \nu \, dS \ - \ \iiint_E \nabla f \cdot \nabla g \, dx dy,$

    ii) $\displaystyle\iint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \nu \, dS = \iiint_E (f \Delta g - g \Delta f) dV.$