Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 2 - 18 a 22 de Setembro de 2023

1. Calcule a área da superfície dada por:

   (a) $g(u,v) = (u, v, 1-u-v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 1$.

   (b) $g(u,v) = (u, v, 1-u-v)$ e $u^2+v^2 \leq 1$.

   (c) A superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$.

   (d) $g(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ e $u^2+v^2 \leq 4$.

   (e) $r(u,v) = (\cos u, v, \operatorname{sen} u)$ e $u^2+4v^2 \leq 1$.

   (f) Porção da superfície cilíndrica $z^2+x^2 = 4$ que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ e acima do plano xOy.

   (g) Porção do cilindro x^2+y^2 =1 entre os planos $z=1$ e $z=4$.

   (h) Superfície parametrizada por $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$.

2. Considere a superfície parametrizada por

$$g(u,v) = (uv, u+v, u-v)$$

   (a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c, 1, 0)$ pertença à superfície

   (b) Admitindo que se restringe o domínio de g ao disco $u^2+v^2 \leq 1$, calcule a área da parte da superfície correspondente.

3. Considere a superfície do toro para $z > 0$ dado pela equação cartesiana

$$(\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2,$$

   com $0 < r < R$.

   (a) Determine a sua área.

   (b) Calcule o integral do campo escalar $f(x,y,z) = z$ sobre esta superfície.

4. Calcule a massa, o centro de massa e o momento de inércia relativamente ao eixo dos yy da superfície

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2, \quad |y| < 1, \quad 0 < x < 1\},$$

   com densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}$.

5. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de revolução que resulta da rotação, em torno do eixo dos zz, duma curva Γ de Jordan, ou seja, simples e fechada, definida no plano radial ρOz, em que $\rho > 0$ é a coordenada radial.

   (a) Mostre que a área da superfície S é dada pela expressão
   $$A(S) = 2\pi \oint_\Gamma \rho \, ds,$$

   (b) Use o resultado anterior para mostrar que a área da superfície de um toro de raios $0 < r < R$ é $4\pi^2 Rr$.

6. Mostre que a área do gráfico de um campo vetorial diferenciável $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to (f(x, y), g(x, y)) \in \mathbb{R}^2$, visto como uma superfície em $\mathbb{R}^4$, é dada por
   $$\int_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} dxdy.$$
   E para uma função $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to f(x, y, z) \in \mathbb{R}$? Qual seria a fórmula do volume tridimensional do seu gráfico em $\mathbb{R}^4$?

7. Calcule o fluxo do campo vectorial $\mathbf{F}$ através da superfície S orientada da forma indicada, sendo:

   (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, xz, 3xzy^2)$ e a superfície
   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -x^2 + y^3 \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < y < 1\},$$
   orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

   (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ e
   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 - 1 \ ; \ z < 0 \ ; \ y > 0\},$$
   orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$.

   (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, 2xy)$ e S o cone definido por
   $$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad 0 < z < 1$$
   orientado com a normal n com terceira componente positiva.

   (d) $\mathbf{F}(x, y, z) = h(r)(x, y, z)$, em que $r = x^2 + y^2 + z^2$ e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua, e S a esfera de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.