

Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semanas 13 e 14 - 18 a 21 de Dezembro de 2023, 3 a 5 de Janeiro de 2024

1. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valor de fronteira têm soluções não triviais:

(a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

(b) $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$.

2. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0, 1[\\ u(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = \text{sen } 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3 \text{sen}(2\pi x) - 7 \text{sen}(4\pi x) + \text{sen}(x).$$

3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad x \in]0, \pi[, \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}(x) - 2 \text{sen}(5x). \end{cases}$$

4. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in]0, L[, \quad \text{com} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

5. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

6. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{se } \text{sen } x > 0 \\ 0 & \text{se } \text{sen } x \leq 0 \end{cases}$$

9. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.
10. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine, e indique a soma para cada $x \in \mathbb{R}$, da:
- série de senos associada a f ;
 - série de cossenos associada a f .

11. Considere a equação de propagação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (*)

- Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é, que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.
- Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0, t) = T_1$, $u(L, t) = T_2$.
- Resolva a equação (*) para $0 \leq x \leq 1$ e para as condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0, t) = 20 \\ u(1, t) = 60 \\ u(x, 0) = 75. \end{cases}$$

12. Seja a função f definida no intervalo $(0, \pi)$ por $f(x) = \text{sen}(x)$.

- Determine a série de Fourier de cossenos da função f .
- Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi, \pi]$.
- Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, & x \in]0, \pi[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

13. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t, 0) = u(t, L) = 0 \\ u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, 1[$) e onde c é um parâmetro real.

14. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1) = \cos(2\pi x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 & \frac{\partial u}{\partial x}(1, y) = \cos(2\pi y) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$.

15. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, \pi]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0, \pi[$).

- b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = (\pi - x)x.$$

16. Seja f a função definida no intervalo $]0, 2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cossenos da função f .

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, & x \in]0, 2\pi[\\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

17. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x, 0, t) = x, & u(x, 1, t) = x \\ u(0, y, t) = 0, & u(1, y, t) = 1 \\ u(x, y, 0) = x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)) \end{cases}$$

para $x, y \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$.