Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 11 - 4 a 7 de Dezembro de 2023

1. Determine a exponencial e^{At} para cada uma das seguintes matrizes

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$c)\ A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad d)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad f)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad h)\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine e^{At} e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule e^{At}.

   (b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{y}(1) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

   onde $\mathbf{h}(t) = (0, 2e^t, e^t)^T$.

4. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea.

(ii) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

5. (i) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

(ii) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.