Cálculo Diferencial e Integral - III

Problemas propostos

Semana 1 - 11 a 15 de Setembro de 2023

1. Determine se os pontos $P(3,-1,5)$ e $Q(-1,3,4)$ pertencem à superfície parametrizada por $r(u,v) = (u+v, u^2-v, u+v^2)$.

2. Determine uma representação paramétrica das superfícies descritas por:

   (a) o plano que passa pelo ponto $(1,2,-3)$ e contém os vetores $(1,1,-1)$ e $(1,-1,1)$.

   (b) A porção do cilindro $y^2+z^2=16$ que se encontra entre os planos $x=0$ e $x=5$.

   (c) A porção no primeiro octante do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z=0$ e $z=3$.

   (d) A parte do plano $z=x+3$ no interior do cilindro $x^2+y^2=1$.

3. Identifique e faça um esboço da imagem da superfície parametrizada por

   (a) $g(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ com $u^2+v^2<1$

   (b) $g(u,v) = (2\operatorname{sen} u, 3\cos u, v)$, com $-\pi/2<u<\pi/2$ e $0<v<2$

   (c) $g(u,v) = (v\cos u, v\operatorname{sen} u, \frac{1}{v^2})$ com $0<u<2\pi$ e $v>0$.

   (d) $g(u,v) = (u+v, 3-v, 1+4u+5v)$, para $u,v\in\mathbb{R}$.

4. Prove que a esfera de raio 1 em $\mathbb{R}^n$, descrita pela equação $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ é uma variedade diferenciável. Qual a sua dimensão?

5. Considere o conjunto formado pela intersecção do plano $z=y$ com o cilindro $x^2+y^2=4$. Mostre que é uma variedade, determine a sua dimensão e indique uma representação paramétrica.

6. Mostre que as equações paramétricas $x=a\cosh u\cos v$, $y=b\cosh u\operatorname{sen} v$, $z=c\operatorname{senh} u$, representam um hiperbolóide com uma folha.

7. Determine a expressão geral do vector normal e do vector normal unitários à superfície S definida por $x^2+y^2+z^2=9$, orientada para fora.

8. Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada por $g(u,v)$ no ponto especificado.

   (a) $x=u^2$, $y=v^2$, $z=uv$ em $u=1$, $v=1$.

   (b) $x=u+v$, $y=3u^2$, $z=u-v$ no ponto $(2,3,0)$.

   (c) $g(u,v) = (\arctan(uv), e^{u^2-v^2}, u-v)$ no ponto $g(1,-1)$.

9. Considere o parabolóide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

   (a) Determine uma representação paramétrica $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ da superfície.

   (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície no ponto $(-a\pi, 0, \pi^2)$.